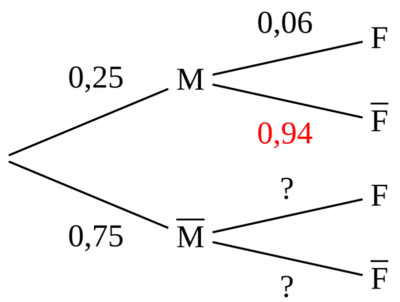
Correction du devoir Du jeudi 9 avril 2020

Exercice I

Probabilités conditionnelles **(4 points)**

1) Bien utilisé les notation de l'énoncé :

$p(\mathrm{F}) = 0,0225$ et



2) $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) = \dfrac{p(\mathrm{M} \cap \mathrm{F})}{p(\mathrm{F})} = \dfrac{p(\mathrm{M}) \times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{F})}{p(\mathrm{F})} = \dfrac{0,25 \times 0,06}{0,0225} = \dfrac{25 \times 6}{225} = \dfrac{2}{3}$

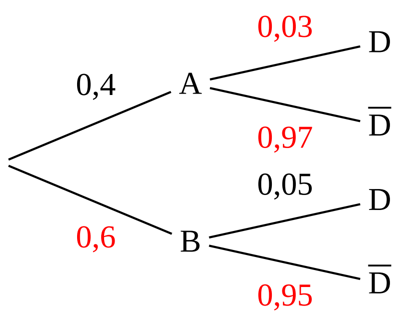
3) $p(\mathrm{F}) \overset{\text{prob. totale}}{=} p(\mathrm{F} \cap \mathrm{M}) + p(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{M}}) = p(\mathrm{M}) \times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{F}) + p(\overline{\mathrm{M}}) \times p_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{F}) \quad \Leftrightarrow$

$$P_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{F}) = \dfrac{p(\mathrm{F}) - p(\mathrm{M}) \times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{F})}{p(\overline{\mathrm{M}})} = \dfrac{0,0225 - 0,25 \times 0,06}{0,75} = 0,01.$$

Exercice II

Probabilités conditionnelles **(4 points)**

1) Bien utilisé les notations de l'énoncé



a) $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{D}) = 0,4 \times 0,03 = 0,012$

b) On calcule d'abord $p(\mathrm{D})$:

$$p(\mathrm{D}) \overset{\text{prob. totale}}{=} p(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) + p(\mathrm{B} \cap \mathrm{D}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{D}) + p(\mathrm{B}) \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{D})$$
$$= 0,012 + 0,06 \times 0,05 = 0,042$$

On a alors : $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{D})}{p(\mathrm{D})} = \dfrac{0,03}{0,042} = \dfrac{5}{7} \approx 0,714$

2) On pose $p(\mathrm{A}) = x$ on a alors $p(\mathrm{B}) = 1 - x$

$p(\mathrm{D}) = p(\mathrm{A}) \times p_{\mathrm{A}}(\mathrm{D}) + p(\mathrm{B}) \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{D}) = 0,03x + 0,05(1-x)$

On veut que : $p(\mathrm{D}) \leqslant 0,035 \Leftrightarrow 0,03x + 0,05(1-x) \leqslant 0,035 \Leftrightarrow -0,02x \leqslant -0,015 \Leftrightarrow$
$$x \geqslant \frac{0,015}{0,02} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Il faut que le club commande plus de 75 % de roulements chez le fournisseur A pour avoir moins de 3,5 % de roulements défectueux

Exercice III

Loi binomiale **(4 points)**

1) X suit une loi binomiale si les 80 expériences consistant à tirer au hasard un client parmi les 80 sont identiques et indépendantes.
X suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(80\ ;\ 0,25)$

2) $p(X = 20) = \binom{80}{20} \times 0,25^{20} \times 0,75^{60} = \text{binomFdp}(80\ ,\ 0.25\ ,\ 20) \approx 0,103$

3) $p(X \geqslant 25) = 1 - p(X \leqslant 24) = 1 - \text{binomFrép}(80\ ,\ 0.25\ ,\ 24) \approx 0,124$

4) $p(15 \leqslant X \leqslant 25) = p(X \leqslant 25) - p(X \leqslant 14)$
$= \text{binomFrép}(80\ ,\ 0.25\ ,\ 25) - \text{binomFrép}(80\ ,\ 0.25\ ,\ 14) \approx 0,846$

Exercice IV

Problème de transmission **(4 points)**

1) Comme on envoie 8 bits de façon identique et indépendante, le nombre de bits mal transmis, X, suit une loi binomiale $\mathscr{B}(8\ ;\ 0,01)$.

2) $p(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0,01^{2} \times 0,99^{6} = \text{binomFdp}(8\ ,\ 0.01\ ,\ 2) \approx 0,002\,6.$

3) $p(X \geqslant 3) = 1 - p(X \leqslant 2) = 1 - \text{binomFRép}(8\ ,\ 0.01\ ,\ 2) \approx 5,39 \times 10^{-5}$

La probabilité d'avoir au moins 3 bits mal transmis est égal à 0,000 1 à la précision de 10^{-4}, donc ce cas est très marginal et n'est pas à envisager.

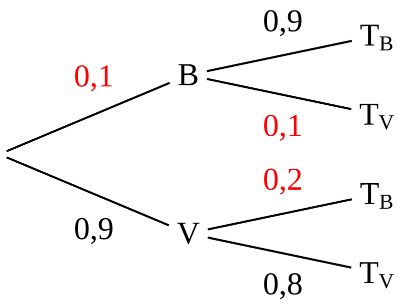
Exercice V

Problème d'un juge **(4 points)**

Ce qui importe pour le juge c'est de connaître la probabilité que le taxi soit bleu sachant que le témoin l'a vu bleu.

Soient les événements :
- B : "Le taxi est bleu".
- V : "Le taxi est vert".
- $\mathrm{T_B}$: "Le témoin voit le taxi bleu"
- $\mathrm{T_V}$: "Le témoin voit le taxi vert"

On suppose, comme il y a deux couleurs en jeu, que si le témoin ne voit pas un taxi vert, il le voit bleu et si le témoin ne voit pas le taxi bleu, il le voit vert. On peut alors faire l'arbre suivant :



$$p_{\mathrm{T_B}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{T_B})}{p(\mathrm{T_B})} \overset{\text{prob. totale}}{=} \frac{p(\mathrm{B}) \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{T_B})}{p(\mathrm{T_B} \cap \mathrm{B}) + p(\mathrm{T_B} \cap \mathrm{V})} = \frac{p(\mathrm{B}) \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{T_B})}{p(\mathrm{B}) \times p_{\mathrm{B}}(\mathrm{T_B}) + p(\mathrm{V}) \times p_{\mathrm{V}}(\mathrm{T_B})}$$

$$= \frac{0,1 \times 0,9}{0.1 \times 0,9 + 0,9 \times 0,2} = \frac{0,09}{0,27} = \frac{1}{3}$$

Cette probabilité étant vraiment très faible, le juge va invalider le témoignage.

Remarque : si la fiabilité sur la couleur verte avait été de 0,95, on aurait trouvé :

$$p_{\mathrm{T_B}}(\mathrm{B}) = \frac{0,1 \times 0,9}{0,1 \times 0,9 + 0,9 \times 0,05} = \frac{0,09}{0,135} = \frac{2}{3}$$

La décision du juge aurait été délicate car la probabilité n'est pas assez forte sans être négligeable (67 %).