Rappels sur les suites. Algorithme

Généralités sur les suites

EXERCICE 1

La suite (u_n) est telle que : $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

1) Calculer à la main u_1, u_2, u_3. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.
2) Écrire un algorithme en pseudo code puis une fonction u(n) en Python donnant le terme u_n, n étant donné. Donner alors les valeurs de u_5, u_{10} et u_{15}.
3) Modifier cette fonction u(n) pour qu'elle donne les termes de u_1 à u_{10}.

EXERCICE 2

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2, \quad u_1 = 4 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n \end{cases}$

1) Calculer à la main les termes u_2, u_3 et u_4.
2) Écrire une fonction u(n) en Python donnant le n-ième terme de la suite. Donner u(6) et u(10).

Variation d'une suite

EXERCICE 3

Déterminer les variations des suites suivantes définie sur $\mathbb{N}$:

1) $u_n = -3n + 1$ 2) $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ 3) $u_n = 2^n$ 4) $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

EXERCICE 4

Montrer que la suite (u_n) est décroissante pour $n \geqslant 2$: $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$

$n!$ = factorielle n et $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$

EXERCICE 5

Déterminer les variations des suites suivantes :

1) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$, $n \geqslant 4$ 2) $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$

Exercice 6

Montrer que la suite suivante est décroissante : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} - n$

Exercice 7

Vrai-Faux

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

1) **Proposition 1 :**
Si (u_n) et (v_n) sont croissantes, alors la suite $w_n = u_n + v_n$ est croissante.
2) **Proposition 2 :**
Si (u_n) et (v_n) sont croissantes alors la suite $t_n = u_n \times v_n$ est croissante.

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 8

(u_n) est une site arithmétique de raison r.

1) Exprimer u_n en fonction de n si $u_0 = 2$ et $r = \dfrac{1}{2}$
2) $u_2 = 41$ et $u_5 = -13$. Calculer u_{20}
3) $u_1 = -2$ et $r = 3$. Calculer u_{20} puis $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$
4) $u_0 = -3$ et $r = -2$. Calculer u_{25} et u_{125} puis $S = u_{25} + u_{26} + \cdots + u_{125}$

Exercice 9

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$

1) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n.
2) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ est arithmétique.
3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 10

(u_n) est une suite géométrique de raison q.

1) $u_1 = 5$ et $q = \dfrac{2}{3}$. Exprimer u_n en fonction de n
2) $u_4 = 1$ et $u_9 = 25\sqrt{5}$. Calculer q puis u_{14}
3) $q = 2$ et $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{12} = 24\,573$. Calculer u_0.

Exercice 11

Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$ est géométrique.
La suite (u_n) converge-t-elle ?

EXERCICE 12

Calculer les sommes suivantes puis vérifier votre résultat à l'aide d'un algorithme :

1) $\mathrm{A} = 5 + 11 + 17 + \cdots + 2015 + 2021$

2) $\mathrm{B} = \dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{3}{2} + 2 + \dfrac{5}{2} + \cdots + 10$

3) $\mathrm{C} = 0,01 - 0,06 + 0,36 - 2,16 + \cdots + 16\,796,16$

Suites arithmético-géométriques et homographique

EXERCICE 13

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 6$

1) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3) Étudier la convergence de la suite (u_n).

EXERCICE 14

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{10} - \dfrac{3}{10}u_n \end{cases}$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 13u_n - 4$

1) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme
2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n et de a.

EXERCICE 15

Dans une réserve, une population initiale de 1 000 animaux évolue ainsi :

- 20 % des animaux disparaissent chaque année (bilan naissances et décès)
- 120 animaux par an sont introduit dans la réserve.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, p_n la population d'animaux l'année n. Ainsi $p_0 = 1\,000$.
Le but est de déterminer l'évolution de cette population au bout de n années.

1) a) Déterminer une relation entre p_{n+1} et p_n.
   b) Conjecturer graphiquement à l'aide d'une calculatrice, l'évolution de la population. On reportera les 5 premiers termes sur l'axes des abscisses.

2) Soit la suite, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = p_n - 600$
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b) Déterminer alors l'expression de v_n puis p_n en fonction de n.
   c) La suite p_n admet-elle une limite en $+\infty$? Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 16

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

1) On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3) Déterminer la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

Autres suites

EXERCICE 17

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + n \ \text{(R)} \end{cases}$

1) Déterminer une suite arithmétique (w_n) satisfaisant la relation (R).
2) On pose $v_n = u_n - w_n$.
   Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison et v_0.
3) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
4) a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.
   b) Programmer la suite (u_n) et vérifier les limites trouvées.

EXERCICE 18

Suite récurrence à deux termes

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -1 \ , \ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$

1) Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.
   Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. En déduire v_n en fonction de n.
3) Soit la suite (w_n) définie par tout $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
   b) Exprimer w_n puis u_n en fonction de n.
4) Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   Programmer S(n) en Python permettant de calculer S_n pour $n \geqslant 2$.
   Donner alors les valeurs approchées à 10^{-4} de S_6, S_{10} et S_{50}.
   Quelle conjecture sur la convergence de la suite (S_n) peut-on faire ?

   Remarque : On montre par récurrence que $S_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$ (Chap 2).

EXERCICE 19

Extrait national 2009

Soit la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout $n \geqslant 1$: $\begin{cases} w_0 = 1 \\ n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1 \end{cases}$

On obtient les premiers termes suivants :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1) Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.
2) Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite (w_n) ?
   En supposant cette conjecture vraie, calculer w_{2021}.

EXERCICE 20

Somme des carrés

1) Déterminer un polynôme P du 3e degré tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ P(x+1) - P(x) = x^2$

2) Compléter les égalités

$$\begin{aligned} P(1) - P(0) &= \\ P(2) - P(1) &= \\ P(3) - P(2) &= \\ \dots \quad &\dots \\ P(n+1) - P(n) &= \end{aligned}$$

3) En déduire alors la formule de la somme des carrés.

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Algorithme

EXERCICE 21

On donne la fonction f(n) en Python .

```
def f(n):
    u=1 ; s=1 ; i=0
    while i<n:
        u=2u+1-i
        s=s+u
        i+=1
    return u,s
```

1) Justifier que $f(3)$ renvoie $(11, 21)$.
2) Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
u				11		
S				21		

Soit (u_n) et (S_n) définies par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 - n \end{cases}$ et $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

3) Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1					
$u_n - n$	1					

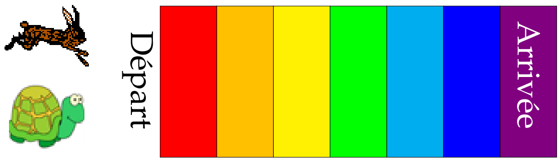
   Quelle conjecture peut-on faire à partir des résultats de ce tableau ?

4) Démontrer que : $u_n = 2^n + n$. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 22

Le lièvre et la tortue

Il s'agit d'un jeu qui se joue avec un dé sur un plateau de sept cases :



Les règles du jeu sont donnée par l'algorithme en pseudo-code suivant :

t désigne la position de la tortue.

1) Rédiger la règle du jeu sous forme d'un texte court.
2) Programmer le jeu avec une fonction partie() en Python renvoyant soit « lievre » ou « tortue » pour désigner le gagnant.
3) Réaliser une simulation de n parties à l'aide de la fonction simul(n) en Python qui donne le nombre de parties gagnées par la tortue.
   Que renvoie simul(100 000) ?
4) Le jeu est-il équitable ? Si non, modifier le nombre de cases du plateau pour rendre ce jeu le plus équitable.

Entrées et initialisation
    $0 \to t$
Traitement et sorties
    tant que $t < 7$ **faire**
        d prend la valeur d'un jet de dé
        si $d = 6$ **alors**
            Afficher « Lièvre »
            Stop
        sinon
            $t = t + d$
        fin
        si $t \geqslant 7$ **alors**
            Afficher « Tortue »
            Stop
        fin
    fin