Rappels sur la dérivabilité. Compléments et convexité

Table des matières

1 Rappels sur la dérivabilité **2**
1.1 Définition 2
1.2 Interprétations 3
1.2.1 Interprétation graphique 3
1.2.2 Interprétation numérique 3
1.2.3 Interprétation cinématique 3
1.3 Signe de la dérivée, sens de variation 3
1.4 Dérivée et extremum 4

2 Dérivée d'une fonction composée **4**
2.1 Composition de deux fonctions 4
2.2 Monotonie d'une fonction composée 5
2.3 Dérivée de la composée 5

3 Dérivées des fonctions usuelles **6**
3.1 Dérivée des fonctions élémentaires 6
3.2 Règles de dérivation 6

4 Convexité **7**
4.1 Définitions 7
4.2 Inégalité 7
4.3 Dérivée seconde 8

-

1 Rappels sur la dérivabilité

1.1 Définition

Définition 1 : Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant a.

La fonction f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie ℓ, c'est à dire :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \quad \text{ou encore} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Dans ce cas, on appelle ℓ le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$

Lorsque la fonction f est dérivable sur un intervalle I, on note f', la fonction dérivée qui à tout x de I associe son nombre dérivée $f'(x)$.

Remarque :

- Si la fonction f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a
- Les physiciens expriment volontiers une variation à l'aide des symboles Δ et d. Ils notent $\Delta x = x - a$ et $\Delta y = f(x) - f(a)$; ou dx et dy pour une variation très petite variation. On obtient alors la notation différentielle de la dérivée :

$$f' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad f'(a) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(a)$$

Exemple : Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{x-4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

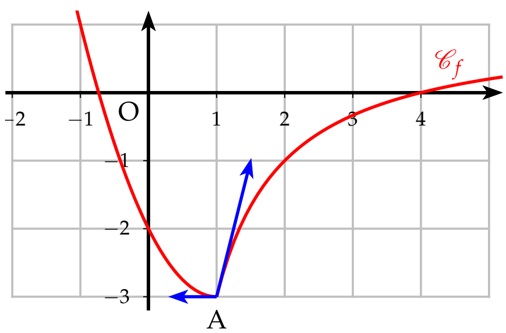
- Continuité de f en 1 : $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = -3$
- Dérivabilité en 1 :
  on étudie les limites à gauche et à droite du taux de variation en 1 :

$$x \leqslant 1 : \quad \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) - 2 - (-3)}{h} = \frac{h^2}{h} = h \xrightarrow[h \to 0^-]{} 0$$

$$x \leqslant 1 : \quad \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\dfrac{1+h-4}{1+h} + 3}{h} = \frac{4h}{h(1+h)} = \frac{4}{1+h} \xrightarrow[h \to 0^+]{} 4$$

Donc les limites ne sont pas égales donc la fonction f n'est pas dérivable en 1.

Graphiquement la fonction f est en un seul morceau (continue en 1) et possède un point anguleux en 1 (non dérivable en 1).



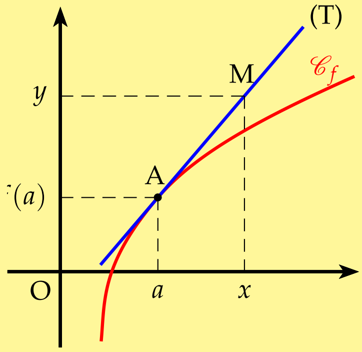
1.2 Interprétations

1.2.1 Interprétation graphique

Théorème 1 : Tangente.

Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$ dont l'équation est :

$$(\mathrm{T}) : \quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



Remarque : Retenir que $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente.

1.2.2 Interprétation numérique

Théorème 2 : Si une fonction f est dérivable en a, une approximation affine, lorsque $a+h$ est voisin de a est : $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$.

Exemple : Déterminer une approximation affine de $\sqrt{4,03}$.

Soit $f(x) = \sqrt{x}$, donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ avec $a = 4$ et $h = 0,03$.

$$\sqrt{4,03} \approx f(4) + 0,03f'(4) \approx 2 + 0,03 \times \frac{1}{4} \approx 2,007\,5$$

La calculatrice donne $\sqrt{4,03} \approx 2,007\,486$, la précision est donc de 10^{-4}.

1.2.3 Interprétation cinématique

Si $x(t)$ est la loi horaire d'un mouvement sur (Ox), alors $x'(t)$ représente la vitesse instantanée à l'instant t. De même, si $v(t)$ est la vitesse instantanée à l'instant t, alors $v'(t)$ représente l'accélération a à l'instant t.

En notations différentielles : $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

1.3 Signe de la dérivée, sens de variation

Théorème 3 : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' = 0$, alors f est constante.
- Si $f' > 0$ (sauf en quelques points isolés de I où f' s'annule), alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ (sauf en quelques points isolés de I où f' s'annule), alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque : L'étude des variations d'une fonction dérivable consiste à étudier le signe de la dérivée.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$.
- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{ou} \quad x_2 = 4$
- f' est positive à l'extérieur des racines et négative à l'intérieur.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-31	$\nearrow$	$+\infty$

1.4 Dérivée et extremum

Théorème 4 : Soit une fonction f dérivable sur I ouvert contenant a.

- Si f admet un extremum en a alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a alors f admet un extremum en a.

Remarque : Les extremum d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de f', mais $f'(a) = 0$, n'implique pas nécessairement un extremum en a.
Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$ et 0 n'est pas extremum..

Conséquence Les problèmes d'optimisation consistent à déterminer une fonction dérivable et à déterminer les extremum locaux.

2 Dérivée d'une fonction composée

2.1 Composition de deux fonctions

Définition 2 : Soit u et v deux fonctions définies respectivement sur I et J tels que $u(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$, c'est à dire que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) \in \mathrm{J}$.
On appelle composée de u par v, la fonction notée $v \circ u$, définie sur I par :

$$v \circ u(x) = v\left[u(x)\right]$$

Exemple : $u(x) = 3x - 4$ et $v(x) = \sqrt{x}$ alors $v \circ u(x) = v(3x-4) = \sqrt{3x-4}$

v est définie sur $\mathrm{J} = \mathbb{R}_+$, la condition sur I est $3x - 4 \geqslant 0$ soit $\mathrm{I} = \left[\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$

On peut faire le schéma suivant : $x \xrightarrow{u} 3x - 4 \xrightarrow{v} \sqrt{3x-4}$

⚠ La composition de deux fonctions n'est pas commutative en effet :

$u(x) = 3x - 4$ et $v(x) = \sqrt{x}$ alors $u \circ v(x) = u(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} - 4$

Remarque : On peut décomposer une fonction en deux fonctions plus simples.
$f(x) = e^{x^2+2}$ se décompose en $u(x) = x^2 + 2$ et $v(x) = e^x$ d'où $f = v \circ u$

2.2 Monotonie d'une fonction composée

Théorème 5 : Soit les fonctions u et v définies respectivement sur I et $u(\text{I})$.

- Si u et v ont même variation alors $v \circ u$ est croissante sur I.
- Si u et v ont des variations opposés alors $v \circ u$ est décroissante sur I.

Démonstration : Dans le cas où u croissante sur I et v décroissante sur $u(\text{I})$.

u est croissante : $\forall x_1, x_2 \in \text{I}, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad u(x_1) < u(x_2)$

v est décroissante : $\forall u(x_1), u(x_2) \in u(\text{I}), \quad u(x_1) < u(x_2) \quad \Rightarrow \quad v[u(x_1)] > v[u(x_2)]$

On a donc : $\forall x_1, x_2 \in \text{I}, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad v[u(x_1)] > v[u(x_2)]$

La fonction $v \circ u$ est décroissante sur I.

Exemple : Soit f définie sur $]-\infty; 1]$ par : $f(x) = \sqrt{1-x}$.

La fonction f se décompose en $v \circ u$, avec : $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = \sqrt{x}$

La fonction u est affine décroissante sur $]-\infty\,; 1]$ et v est croissante sur $[0\,; +\infty[$

d'après la monotonie des fonctions composées, f est décroissante sur $]-\infty\,; 1]$

⚠ Il n'est donc pas nécessaire pour ce cas de déterminer le signe de la dérivée pour connaître les variations de la fonction f.

2.3 Dérivée de la composée

Théorème 6 : Soit u et v deux fonctions dérivables respectivement que I et J tels que $u(\text{I}) \subset \text{J}$, alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et : $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x^2 - 1)$.

- On décompose la fonction $f = v \circ u$ avec $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = \cos x$
- u et v sont dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $f'(x) = u'(x) \times v' \circ u(x) = 2x[-\sin(x^2-1)] = -2x\sin(x^2-1)$

Démonstration : L'idée de la démonstration est d'étudier la limite du taux de variation de $f = v \circ u$ au voisinage d'un point $a \in \text{I}$ avec $\forall x \neq a, \quad u(x) \neq u(a)$.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{v \circ u(x) - v \circ u(a)}{x-a} = \underbrace{\frac{v[u(x)] - v[u(a)]}{u(x)-u(a)}}_{\text{dérivée de } v \text{ en } u(a)} \times \underbrace{\frac{u(x)-u(a)}{x-a}}_{\text{dérivée de } u \text{ en a}}$$

d'où $(v \circ u)'(a) = v'[u(a)] \times u'(a)$

3 Dérivées des fonctions usuelles

3.1 Dérivée des fonctions élémentaires

Fonction	D_f	Dérivée	$D_{f'}$
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

3.2 Règles de dérivation

Dérivée de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(ku)' = ku'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Dérivée de l'exponentielle	$(e^u)' = u'\,e^u$
Dérivée de la composée	$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$

Remarque : La dérivée de la composée explique les autres formules.

Exemples :

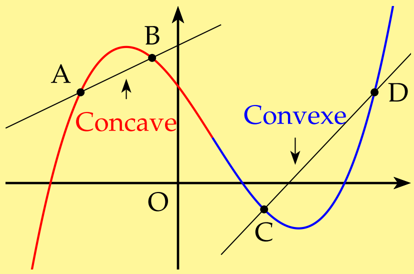
- $f(x) = (3x-5)^4$ forme $(u^n)'$ d'où $f'(x) = 4 \times 3(3x-5)^3 = 12(3x-5)^3$
- $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ forme $(\sqrt{u})'$ d'où $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$
- $f(x) = e^{-3x+5}$ forme $(e^u)'$ d'où $f'(x) = -3\,e^{-3x+5}$
- $f(x) = \sin(e^x)$ forme $(v \circ u)'$ d'où $f'(x) = e^x \cos(e^x)$

4 Convexité

4.1 Définitions

Définition 3 : Soit une fonction f de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

- On appelle sécante de $\mathscr{C}_f$ la droite passant par deux points de $\mathscr{C}_f$.
- On dit que f est convexe sur I si $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ses sécantes sur I.
- On dit que f est concave sur I si $\mathscr{C}_f$ est au dessus de ses sécantes sur I.



Exemples : La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_-^*$ et concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
Les fonctions carrée et exponentielle $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
La fonction racine $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.

4.2 Inégalité

Théorème 7 : Soit f une fonction définie sur I contenant a et b et $t \in [0\,;\,1]$.

- Si f est convexe alors : $f\,[ta+(1-t)b] \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$.
- Si f est concave alors : $f\,[ta+(1-t)b] \geqslant tf(a) + (1-t)f(b)$.

Démonstration : Dans le cas où f est convexe.

Soit $\mathrm{A}(a\,;\,f(a))$ et $\mathrm{B}(b\,;\,f(b))$.

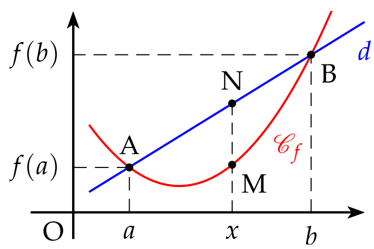
Soit $x \in [a\,;\,b]$, on pose $t = \dfrac{b-x}{b-a}$

on a alors $x = ta + (1-t)b$ avec $t \in [0\,;\,1]$

On peut montrer alors que : $y_\mathrm{N} = tf(a) + (1-t)f(b)$

Le point M est en dessous du point N donc $y_\mathrm{M} < y_\mathrm{N}$

$$f[ta+(1-t)b] \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$$



4.3 Dérivée seconde

Définition 4 : Soit une fonction f deux fois dérivable sur I.

On appelle dérivée seconde de f, notée f'', la fonction dérivée de f' : $f'' = (f')'$.

Remarque : Le signe de la dérivée seconde donne les variations de la fonction f'.
- Si $f'' > 0$ l'accroissement de f augmente avec x : cas de la fonction $x \mapsto e^x$.
- Si $f'' < 0$ l'accroissement de f diminue avec x : cas de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

En cinématique, la dérivée seconde de la loi horaire donne l'accélération.

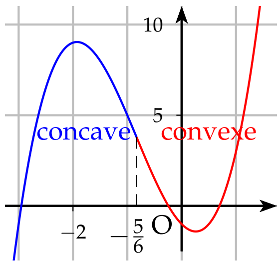
Exemple : Soit la fonction f définie que $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 1$.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 6x^2 + 10x - 3$ et $f''(x) = 12x + 10$

Théorème 8 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.
- f est convexe sur I si, et seulement si, $f'' > 0$.
- f est concave sur I si, et seulement si, $f'' < 0$.

Exemple : Reprenons : $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 1$, on a : $f''(x) = 12x + 10$.

- $f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 12x + 10 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\dfrac{5}{6}$
- Si $x > -\dfrac{5}{6} \;\Leftrightarrow\; f''(x) > 0$, la fonction f est convexe.
- Si $x < -\dfrac{5}{6} \;\Leftrightarrow\; f''(x) < 0$, la fonction f est concave.



Théorème 9 : Tangentes et dérivée seconde

Soit une fonction f deux fois dérivables sur I de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
- Si $f'' > 0$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.
- Si $f'' < 0$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ses tangentes

Démonstration : Dans le cas où $f'' > 0$.

Soit $a \in$ I, montrons que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente T_a en a.
T_a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, posons $\varphi(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$.

φ est dérivable sur I par opérations sur des fonctions dérivables.
$\varphi(x) = f(x) - f'(a)x + \underbrace{af'(a) - f(a)}_{\text{constant}} \;\Rightarrow\; \varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$

$f'' > 0$ donc la fonction f' est croissante sur I donc :
- Si $x > a \;\Rightarrow\; f'(x) > f'(a) \;\Rightarrow\; \varphi'(x) > 0$.
- Si $x < a \;\Rightarrow\; f'(x) < f'(a) \;\Rightarrow\; \varphi'(x) < 0$.
- $\varphi(a) = f(a) - f(a) = 0$

x		a	
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$\forall x \in$ I, $\varphi(x) \geqslant 0$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T_a.

Définition 5 : Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
Soit A un point de $\mathscr{C}_f$ de tangente T_a.

- On dit que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion en A si la tangente T_a traverse $\mathscr{C}_f$.
- Si $f''(a) = 0$ en changeant de signe alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion en a.

Remarque : Le fait que la tangente T_a traverse la courbe $\mathscr{C}_f$ cela signifie que T_a change de position par rapport à $\mathscr{C}_f$ (au dessus puis en dessous ou inversement).

Si f'' change de signe en a alors f' ne change pas de signe en a.