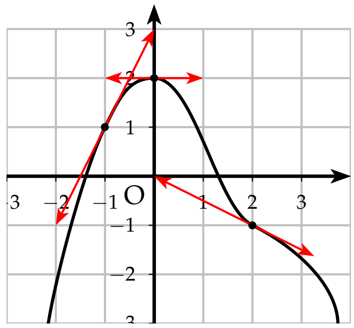
Rappels sur la dérivabilité. Compléments et convexité

Définition

Exercice 1

À l'aide de la représentation graphique ci-contre de la fonction f, remplir le tableau suivant :

x	-1	0	2
$f(x)$			
$f'(x)$			

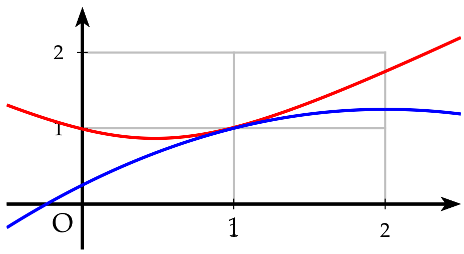


Exercice 2

On a représenté les courbes des fonctions f et g :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}$$

1) Que peut-on conjecturer pour ces deux courbes au point d'abscisse 1 ?
2) Démontrer la conjecture.



Calculs de dérivées

Exercice 3

Dans chaque cas, donner le domaine de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée f' de la fonction f en cherchant à factoriser f'.

1) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{6}$
2) $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{x - 2}$
3) $f(x) = x - 6 + \dfrac{9}{x - 1}$
4) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 1}$
5) $f(x) = \left(x^2 + 2x - 3\right)^2$
6) $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x + 2}\right)^3$

Exercice 4

Dans chaque cas, donner le domaine de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée f' de la fonction f en cherchant à factoriser f'.

1) $f(x) = \sqrt{4 - x}$
2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{2 - x}}$
3) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

Exercice 5

Dans chaque cas, donner le domaine de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée f' de la fonction f.

1) $f(x) = (x^2+1)e^x$ 2) $f(x) = e^{-x+2}$ 3) $f(x) = xe^{-x}$

4) $f(x) = e^{x^2-x}$ 5) $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$ 6) $f(x) = \cos 2x$

Équation de la tangente

Exercice 6

Dans chacun des cas, écrire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse indiqué.

1) $f(x) = x^3 + x^2 - 3x \quad a = 1$ 2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \quad a = 2$

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x+1}$

1) Calculer les limites en -1 et en $+\infty$ et $-\infty$
2) Calculer la fonction dérivée de la fonction f.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f. On calculera les valeurs approchées des extremum de la fonction f à 10^{-2}.
4) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = -4x - 5$?
   Si oui, donner l'équation de cette ou ces tangente(s).
5) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $3x - 2y = 0$?
   Si oui, donner l'équation de cette ou ces tangente(s).
6) Vérifier ces résultats sur votre calculatrice.
   Fenêtre : $x \in [-15; 13]$ et $y \in [-20; 10]$ et graduation : 5 sur les deux axes.

Exercice 8

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x+1}}{x}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b) Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$.
2) a) Sur quel ensemble la fonction f est-elle dérivable ?
   b) Déterminer alors la fonction dérivée f'.
   c) Déterminer le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f.
3) a) Que peut-on dire de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $\dfrac{1}{5}$?
   b) Représenter la courbe $\mathscr{C}_f$.

Fonction composée

EXERCICE 9

Soit les fonction f et g définies par : $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 3}$ et $g(x) = x^3 - 3x + 3$.

1) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α au centième.
2) En déduire les ensembles de définition et de dérivation de f.
3) Dresser le tableau de variation de f à l'aide de la fonction g.

Convexité

EXERCICE 10

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.
   Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{-x}$.
   Étudier la convexité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

1) Montrer que $f''(x) = \dfrac{(x^2 - 2x + 2)e^x}{x^3}$.
2) En déduire un point d'inflexion éventuel de la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 12

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = (x^2 + 2)e^x$

1) Calculer f' puis f''.
2) En déduire la convexité et d'éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2-1}$.

1) a) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1}$.
   b) En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.
2) a) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}$.
   b) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x - f(x)$. On admet que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
   Déterminer le signe de $h(x)$ sur $[-1\,;\,1]$ et en déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite d d'équation $y = x$ sur $[-1\,;\,1]$.
   Que peut-on déduire sur la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?