Exercices type bac

EXERCICE 1

Fonction ln

Partie A : fonction auxiliaire g

Soit la fonction g définie sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = 2(x-1) - x\ln x$

1) Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
2) Calculer les limites en $+\infty$ et en 0^+ en vous justifiant avec soin.
3) Calculer la fonction dérivée g' sur I puis dresser le tableau de variation de g.
4) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution évidente sur $]0\,;\,e]$ et une unique solution α sur $[e\,;+\infty[$.

   b) Donner un encadrement de α à 10^{-3} avec l'algorithme de dichotomie. Pour trouver un intervalle fermé, on donnera une valeur approchée de $g(6)$.
5) En déduire le tableau de signe de g sur I.

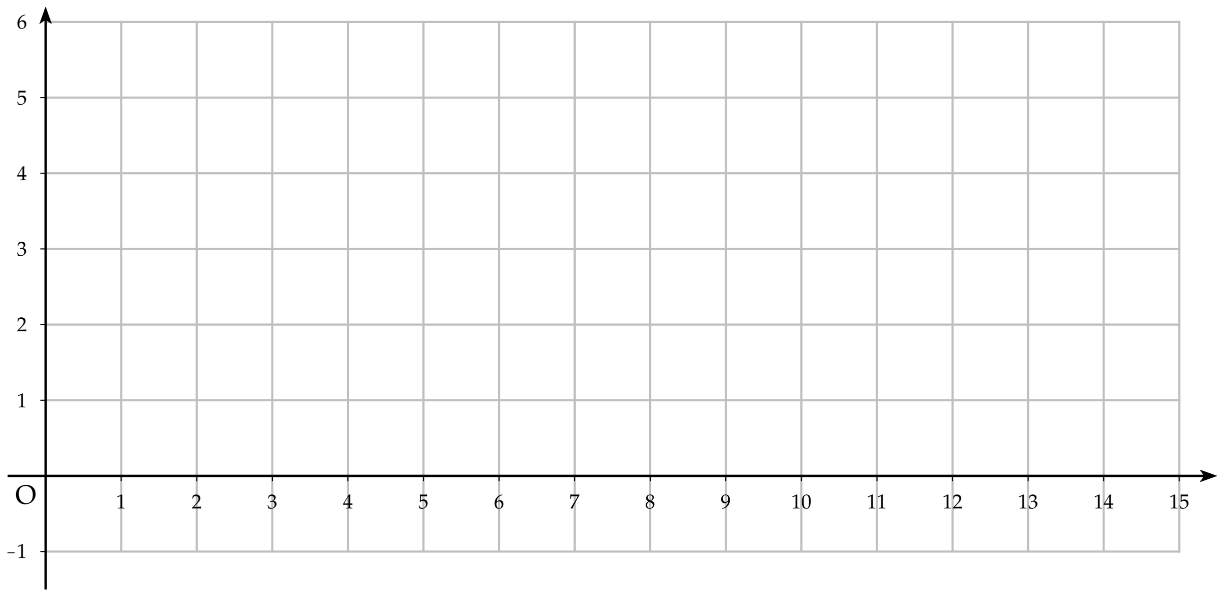
Partie B : étude de la fonction principale

Soit la fonction f définie sur I par : $f(x) = 3x - x\ln x - 2\ln x$.

1) Déterminer les limites en $+\infty$ et en 0^+ en vous justifiant avec soin.
2) a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

   b) En déduire le tableau de variation de f sur I.
   On donnera une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.
3) a) Calculer la dérivée seconde f'' sur I.

   b) Étudier la convexité de f.
   Préciser les coordonnées du point d'inflexion J de $\mathscr{C}_f$.
4) Tracer avec soin l'allure de $\mathscr{C}_f$ sur $]0\,;\,15]$ dans le repère ci-dessous en faisant figurer les extremum et le point d'inflexion J.

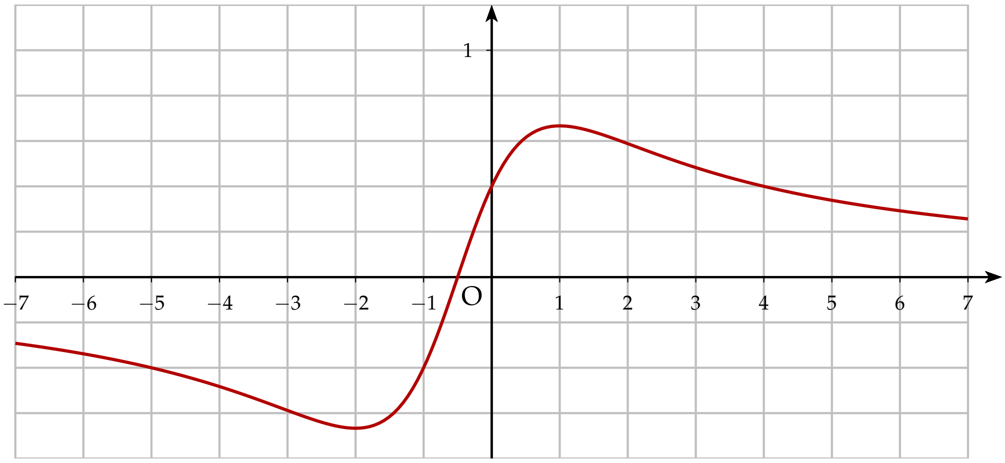


EXERCICE 2

Fonction ln

Partie A : Lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la **courbe représentative de la fonction dérivée** f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1) Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction dérivée f'.
   b) En déduire l'intervalle le plus grand sur lequel f est convexe.

Partie B : Étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)$.

1) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Déterminer $f'(x)$.
3) Dresser le tableau des variations de f.
4) a) Montrer que sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$. l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α.
   b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par balayage d'un tableau de valeurs.
5) a) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée seconde $f''(x)$.
   b) Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f.
   On se justifiera.