Fonctions sinus et cosinus

Table des matières

-

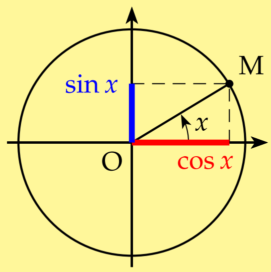
1 Rappels

1.1 Définition

Définition 1 : Fonctions sinus et cosinus

À tout réel x, on associe un point unique M du cercle unité de centre O, dont les coordonnées sont :

$$\mathrm{M}(\cos x\ ;\ \sin x)$$



On définit alors les fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto \sin x \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \cos x$$

1.2 Mesure principale d'un angle

Définition 2 : La mesure principale d'un angle α est la mesure $x \in]-\pi\ ;\ \pi]$.

Exemple : Déterminer la mesure principale des angles de mesures $\dfrac{17\pi}{4}$ et $-\dfrac{31\pi}{6}$.

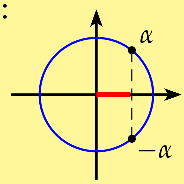
- $\dfrac{17\pi}{4} > \pi$ mesure trop grande. On enlève k de tours soit $k2\pi = \dfrac{8k\pi}{4}$.
  On enlève à 17 un multiple de 8, ici 16 : $\dfrac{\pi(17-16)}{4} = \dfrac{\pi}{4}$.
- $-\dfrac{31\pi}{6} \leqslant -\pi$ mesure trop petite. On ajoute k de tours soit $k2\pi = \dfrac{12k\pi}{6}$.
  On ajoute un multiple de 12, ici 36 : $\dfrac{\pi(-31+36)}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$

1.3 Résolution d'équations

Théorème 1 : Résolution de $\cos x = a$ et $\sin x = a$

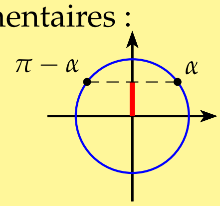
- Si $|a| > 1$, il n'y a pas de solution.
- Si $|a| \leqslant 1$, alors on détermine α tel que $\alpha = \arccos(x)$ ou $\alpha = \arcsin(x)$
- Deux cosinus sont égaux si leurs angles sont égaux ou opposés :

$$\cos x = \cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$



- Deux sinus sont égaux si leurs angles sont égaux ou supplémentaires :

$$\sin x = \sin\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$



Remarque : $x = \alpha + k2\pi$ peut aussi s'écrire $x = \alpha \ [2\pi]$ (modulo 2π).

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $\sqrt{2}\cos x + 1 = 0 \iff \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos x = \cos\dfrac{3\pi}{4}$

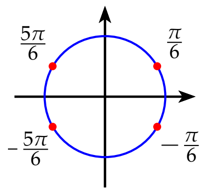
  Solutions : $\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$

- $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} \iff \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6}$

  Solutions : $\begin{cases} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$

- $\cos 2x = \dfrac{1}{2} \iff \cos 2x = \cos\dfrac{\pi}{3}$

  Solutions : $\begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \overset{\div 2}{\iff} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$

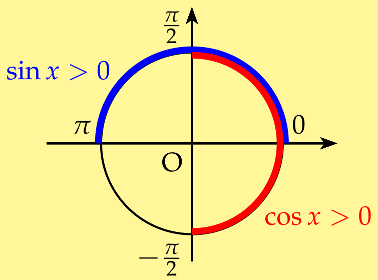


1.4 Signes des fonctions sinus et cosinus

Théorème 2 : On a sur $]-\pi\,;\,\pi]$,

$$\sin x > 0 \iff x \in]0\,;\,\pi[$$

$$\cos x > 0 \iff x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$$



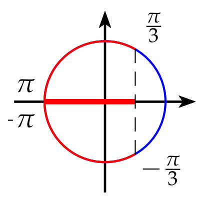
1.5 Résolution d'inéquations

Théorème 3 : Pour résoudre une inéquation du type $\cos x \leqslant a$ ou $\sin x \leqslant a$ on utilisera le cercle unité pour trouver les solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

Exemple : Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$, $\cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$

$$\cos x \leqslant \frac{1}{2} \iff \cos x \leqslant \cos\frac{\pi}{3}$$

$$S = \left]-\pi\,;-\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}\,;\,\pi\right]$$



1.5.1 De sinus à cosinus

Théorème 4 : D'après les formules de déphasage, on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$$

Exemple : Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x$

D'après les formules de déphasage : $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}-x+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{4}=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ 0x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \text{ impossible} \end{cases} \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{8}+k\pi$$

Dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$, on a pour $k\in\{-1\,,\,1\}$: $x=-\dfrac{7\pi}{8}$ ou $x=\dfrac{\pi}{8}$.

2 Étude des fonctions sinus et cosinus

2.1 Périodicité et parité

Propriété 1 : Les fonctions sin et cos sont 2π-périodique :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin(x+2\pi)=\sin x \quad \text{et} \quad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

Les fonctions sin et cos sont respectivement impaire et paire :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin(-x)=-\sin x \quad \text{et} \quad \cos(-x)=\cos x$$

$\mathscr{C}_{\sin}$ est symétrique par rapport à l'origine, et $\mathscr{C}_{\cos}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarque : Du fait de la périodicité et de la parité :

- On étudiera les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle de 2π : $]-\pi;\pi]$.
- Cet intervalle peut être réduit par la symétrie de la parité : $[0\,;\,\pi]$

2.2 Dérivées

Théorème 5 : Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\sin'=\cos \quad \text{et} \quad \cos'=-\sin$$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction f sur $[0\,;\,\pi[$: $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{1+\cos x}$

En utilisant la dérivée du quotient :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\cos x - \sin x)(1+\cos x) - (-\sin x)(\sin x + \cos x)}{(1+\cos x)^2}\\
&= \frac{\cos x + \cos^2 x - \sin x - \sin x \cos x + \sin^2 x + \sin x \cos x}{(1+\cos x)^2}\\
&= \frac{\cos x - \sin x + \overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{=1}}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x - \sin x + 1}{(1+\cos x)^2}
\end{aligned}$$

2.3 Variation en 0

Théorème 6 : On a : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Démonstration : On revient à la définition du nombre dérivée en 0.

$$\left.\begin{array}{l} \sin' 0 = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h - \sin 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\ \sin' 0 = \cos 0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos' 0 = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - \cos 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}\\ \cos' 0 = \sin 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

2.4 Variations des fonctions sin et cos

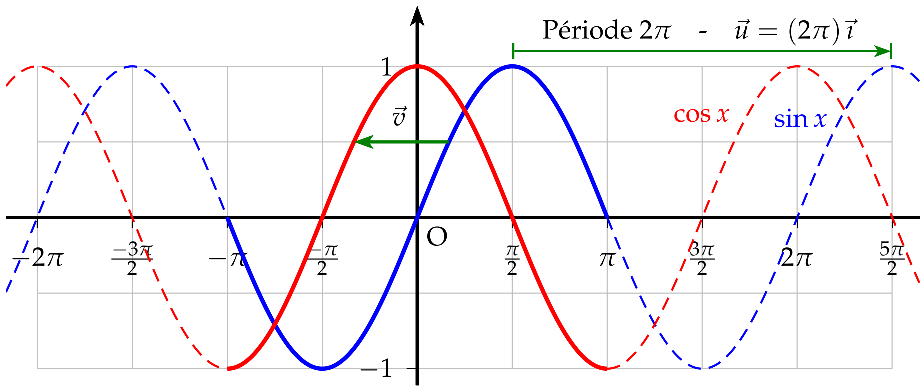
D'après le signe de sin et cos, on obtient les tableaux de variation sur $]-\pi\,;\,\pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

x	$-\pi$		0		π
$\cos' x = -\sin x$		$+$	0	$-$	
$\cos x$	-1	↗	1	↘	-1

2.5 Courbes représentatives

- On déduit $\mathscr{C}_{\sin}$ et $\mathscr{C}_{\cos}$ sur $\mathbb{R}$ par translations de vecteurs $\vec{u} = (2k\pi)\,\vec{\imath},\ k \in \mathbb{Z}$.
- On déduit $\mathscr{C}_{\cos}$ de $\mathscr{C}_{\sin}$ par une translation de vecteur $\vec{u} = -\dfrac{\pi}{2}\,\vec{\imath}$.
- Les courbes $\mathscr{C}_{\sin}$ et $\mathscr{C}_{\cos}$ sont appelées sinusoïdes.



2.6 Dérivée de la composée

Théorème 7 : Soit u une fonction dérivable sur I

Les fonctions $\sin u$ et $\cos u$ sont dérivables sur I et :

$$(\sin u)' = u' \times \cos u \quad \text{et} \quad (\cos u)' = -u' \sin u$$

Remarque : Les fonctions $x \mapsto \sin(ax+b)$ et $x \mapsto \cos(ax+b)$ sont $\dfrac{2\pi}{a}$ périodiques

En effet : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin\left[a\left(x+\dfrac{2\pi}{a}\right)+b\right] = \sin(ax+b+2\pi) = \sin(ax+b)$

2.7 Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2}{2+\cos x}$

1) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que la fonction f est paire et 2π-périodique.
   En déduire le plus petit intervalle d'étude de la fonction f.
3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
4) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$ puis tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi\,;\,3\pi]$

$\Rightarrow \Rightarrow$

1) $D_f = \mathbb{R}$ car l'équation $2+\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -2$ n'a pas des solution
2) La fonction f est paire et 2π périodique, en effet pour tout réel x,

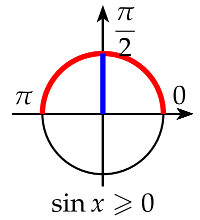
$$f(-x) = \frac{2}{2+\cos(-x)} = \frac{2}{2+\cos x} = f(x)$$
$$f(x+2\pi) = \frac{2}{2+\cos(x+2\pi)} = \frac{2}{2+\cos x} = f(x)$$

   f est 2π-périodique, on peut l'étudier sur $]-\pi\,;\,\pi]$ mais comme elle est paire, symétrique par rapport à zéro, on peut réduire l'intervalle d'étude de f à $[0;\pi]$

3) $f'(x) = -\dfrac{2(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \dfrac{2\sin x}{(2+\cos x)^2}$

Sur $[0; \pi]$

- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = \pi$
- Le signe de $f'(x)$ est du signe de $\sin x$ donc $f'(x) \geqslant 0$



4) Pour déterminer les variation de f sur $[-\pi\ ;\ 0]$, on utilise la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées (fonction paire)

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0		$-$		0		$+$		0
$f(x)$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2

$f(0) = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{2+0} = 1$

$f(\pi) = \dfrac{2}{2-1} = 2$

Par translation, on obtient alors la courbe dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ 3\pi]$: