Primitives et équations différentielles

Table des matières

-

1 Équation différentielle et primitive

1.1 Equation différentielle

Définition 1 : Une équation différentielle d'ordre n est une équation :

- dont l'inconnue est une fonction y de variable x, n fois dérivable ;
- liant y et certaines de ses dérivées : $y', y'', \dots, y^{(n)}$ et éventuellement x.

Résoudre une équations différentielle c'est déterminer l'ensemble des fonctions y dérivables sur I$\subset \mathbb{R}$qui vérifient cette équation.

Remarque : Ils existent de nombreuses formes d'équations différentielles : homogène, linéaire, à variables séparées, ...

Exemples :

- Équation du premier ordre : $y' = 2y + 5$, $\quad y' = 2xy + 4x$, $\quad y' = y^2$
- Équation du second ordre : $y'' + 4y = 0$, $\quad x^2y'' - 2y + 2x = 0$.
- Soit l'équation différentielle : $y' = y$.
  Les solutions y sont telles que $y(x) = ae^x$ avec $a \in \mathbb{R}$. En effet $y'(x) = ae^x$.
  La fonction exponentielle est une solution particulière de l'équation $y' = y$

1.2 Primitive

Définition 2 : Soit f est une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, une solution F de l'équation $y' = f(x)$. On a :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad F'(x) = f(x)$$

Remarque : Le mot « primitive » fait écho à la fonction dérivée. C'est la fonction « initiale » qui donne une fonction dérivée connue.

En physique c'est le cas lorsqu'on connaît la vitesse en fonction du temps et que l'on cherche l'équation horaire.

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$.

   $F : x \mapsto x^2$ est une primitive de f car F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = 2x$.

2) Soit la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x(\ln x - 1)$.
   Montrer que F est une primitive de la fonction ln.

   F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $F'(x) = \ln x - 1 + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x$.

   F est donc une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Théorème 1 : Soit une fonction f admettant une primitive F sur I, alors toute primitive G de f sur I est de la forme : $G = F + k, \quad k \in \mathbb{R}$

Démonstration : Par double implication.

- Soit G une fonction définie sur I par : $G = F + k, \quad k \in \mathbb{R}$.

  G est dérivable sur I par somme de fonctions dérivables et $\quad G' = F' \overset{F'=f}{=} f$.
  G est donc une primitive de f sur I.

- Réciproquement soit G une primitive de f sur I, G est dérivable sur I et :
  $$(F - G)' = F' - G' = f(x) - f(x) = 0$$
  La fonction $(F - G)$ est constante, donc : $\exists k \in \mathbb{R}, \quad G - F = k \quad \Leftrightarrow \quad G = F + k$

Exemple : Si $F : x \mapsto x^2$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x$ alors $G : x \mapsto x^2 + 3$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1.3 Primitive vérifiant une condition initiale

Théorème 2 : Soit f une fonction admettant une primitive sur I. Soit $x_0 \in$ I et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I tel que : $F(x_0) = y_0$.

Démonstration : Soit F et G deux primitives de f sur I. On a donc : $F = G + k$.
Si on impose $F(x_0) = y_0$ alors il existe un unique $k \in \mathbb{R}$ telle que : $k = y_0 - G(x_0)$

Exemple : Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto 2x$ tel que $F(2) = 3$.

F est une primitive de f donc : $F(x) = x^2 + k$

$F(2) = 4 + k \quad$ alors $\quad k = F(2) - 4 = 3 - 4 = -1$ donc $F(x) = x^2 - 1$.

1.4 Existence de primitives

Théorème 3 : Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.

Remarque : On admettra ce théorème. Sa démonstration repose sur le théorème fondamental de l'intégration, objet du chapitre suivant. Ces deux notions ont été liées dès le départ à la fin du XVII^e siècle avec Newton et Leibniz.

La continuité est une condition suffisante mais non nécessaire pour qu'une fonction admette des primitives. Il existe des fonctions non continues qui admettent des primitives mais cela dépasse le cadre du programme.

Ce théorème est un théorème d'existence, il ne donne pas l'expression des primitives d'une fonction continue.

Pour pouvoir déterminer les primitives d'une fonction, on répertorie les primitives des fonctions élémentaires par une lecture inverse du tableau des dérivées

1.5 Primitives des fonctions de référence

On prend comme constante d'intégration $k = 0$ et $n \in \mathbb{N}$

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\|x\|$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

1.6 Règles d'intégrations

On notera $\int u$ pour la primitive de la fonction u.
On prend comme constante d'intégration $k = 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

Primitive de la somme	$\int (u+v) = \int u + \int v$
Primitive du produit par un scalaire	$\int (au) = a \int u$
Primitive de $u'u^n$	$\int u'u^n = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
Primitive de $\dfrac{u'}{u}$	$\int \dfrac{u'}{u} = \ln\|u\|$
Primitive de $\dfrac{u'}{u^n} \quad n \neq 1$	$\int \dfrac{u'}{u^n} = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
Primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$\int \dfrac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$
Primitive de $u'e^u$	$\int u'e^u = e^u$
Primitive de $u' \times v \circ u$	$\int (u' \times v \circ u) = (\int v) \circ u$

1.7 Applications des deux tableaux

Exemples d'application du tableau des fonctions de référence

1) Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ alors $F(x) = \dfrac{x^5}{5}$

2) Sur $]0\,;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ alors $F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$

On peut aussi écrire $f(x) = x^{-3}$, en généralisant la formule de x^n avec $n \in \mathbb{Z}$:
on obtient : $F(x) = \dfrac{x^{-3+1}}{-3+1} = \dfrac{x^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{2x^2}$

Exemples d'application du tableau des règles d'intégration

⚠ Bien adapter le coefficient lorsque cela est nécessaire pour une forme donnée

Polynôme : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, alors $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + 2x^2 - x$

Forme $\mathbf{u'u^n}$: $f(x) = 2x(x^2-1)^3$, alors $F(x) = \dfrac{(x^2-1)^4}{4}$

$$f(x) = (3x-1)^4 = \frac{1}{3}\left[3(3x-1)^4\right], \quad \text{alors} \quad F(x) = \frac{1}{3}\frac{(3x-1)^5}{5} = \frac{(3x-1)^5}{15}$$

Forme $\mathbf{\dfrac{u'}{u}}$: $f(x) = \dfrac{2}{2x-3}$, alors $F(x) = \ln|2x-3|$

$$f(x) = \frac{1}{4x+1} = \frac{1}{4}\left[\frac{4}{4x+1}\right], \quad \text{alors} \quad F(x) = \frac{1}{4}\ln|4x+1|$$

Forme $\mathbf{\dfrac{u'}{u^n}}$: $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x-3)^2} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}\right]$, alors

$$F(x) = \frac{-1}{2(x^2+2x-3)}$$

Forme $\mathbf{\dfrac{u'}{\sqrt{u}}}$: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ alors $F(x) = 2\sqrt{x+4}$

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{2x+1}}\right], \quad \text{alors} \quad F(x) = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{2x+1} = 3\sqrt{2x+1}$$

Forme $\mathbf{u'e^u}$: $f(x) = e^{4x+1} = \dfrac{1}{4}\left[4e^{4x+1}\right]$, alors $F(x) = \dfrac{1}{4}e^{4x+1}$

$$f(x) = xe^{-x^2+3} = -\frac{1}{2}\left[-2xe^{-x^2+3}\right], \quad \text{alors} \quad F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2+3}$$

Remarque : Trouver une primitive n'est pas toujours chose facile. Des manipulations plus sophistiquées (décomposition en éléments simples ou changement de variable) sont parfois nécessaires pour déterminer une primitive (cf compléments sur l'intégration). Parfois la primitive ne correspond à aucune fonction connue, elle est uniquement définie comme primitive (par exemple la primitive de e^{-x^2})

Contrairement à la dérivation qui est toujours possible, la recherche de primitive s'avère donc parfois impossible !!

2 Équation différentielle linéaire du premier ordre

2.1 Équation homogène $y' = ay$

Théorème 4 : Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme : $y(x) = k\,e^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$.
Soit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution f qui vérifie : $f(x_0) = y_0$.

Démonstration : Les fonctions de la forme $y(x) = k\,e^{ax}$ sont bien solutions de l'équation car $y'(x) = ka\,e^{ax} = ay(x)$.
Réciproquement supposons que g est une solution de l'équation, montrons que g est de la forme $g(x) = k\,e^{ax}$.
Posons $h(x) = g(x)\,e^{-ax}$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

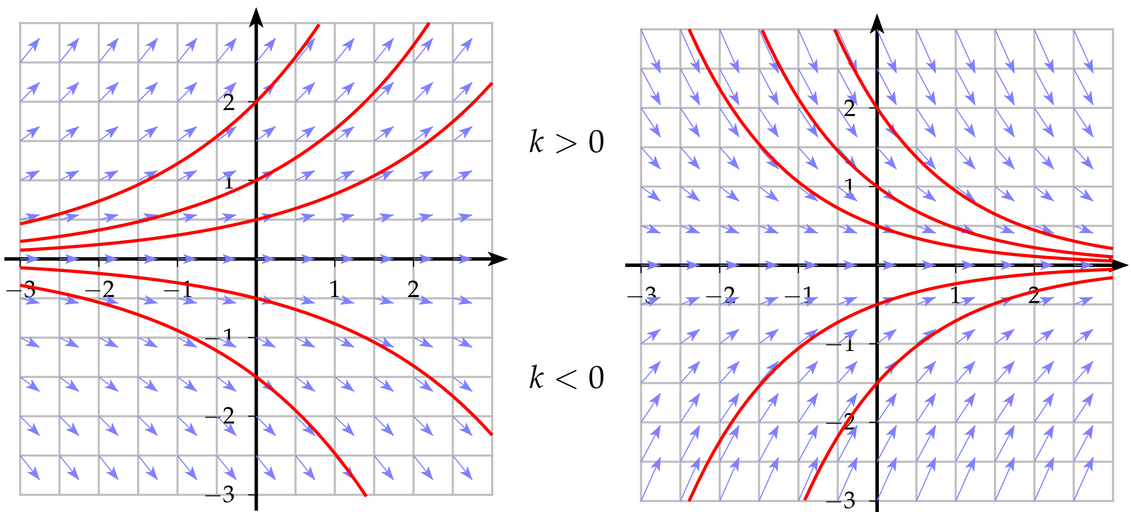
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h'(x) = g'(x)\,e^{-ax} - ag(x)\,e^{-ax} \overset{g'=ag}{=} ag(x)\,e^{-ax} - ag'(x)\,e^{-ax} = 0$$

La fonction h est constante donc il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h(x) = k \quad \Leftrightarrow \quad g(x)\,e^{-ax} = k \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = k\,e^{ax}$$

Si on impose $f(x_0) = y_0$, on a $k\,e^{ax_0} = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad k = y_0\,e^{ax_0}$ donc f est unique.

Exemple : Courbes solutions suivants le signe de a et celui de k.



$a > 0, \quad y = \dfrac{1}{2}y$
Amplification

$a < 0, \quad y' = -\dfrac{3}{4}y$
Atténuation

2.2 Équation linéaire $y' = ay + b$

Théorème 5 : Soit $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$. Les solutions de $y' = ay + b$ sont de la forme : $y(x) = k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$.

Soit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution f qui vérifie : $f(x_0) = y_0$.

Démonstration : Les fonctions de la forme $y(x) = k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ sont bien solutions de l'équation car $y'(x) = ka\,e^{ax} = a\left(y(x) + \dfrac{b}{a}\right) = ay(x) + b$.

Réciproquement $y_0 = -\dfrac{b}{a}$, est solution car $ay_0 + b = -b + b = 0 = y_0'$.
Soit y une solution quelconque, comme y_0 est solution, on a le système suivant :

$$\begin{cases} y' = ay + b \\ y_0' = ay_0 + b \end{cases}$$

Par soustraction terme à terme : $y' - y_0' = ay - ay_0 \;\Leftrightarrow\; (y - y_0)' = a\,(y - y_0)$
La fonction $y - y_0$ vérifie donc l'équation homogène donc :

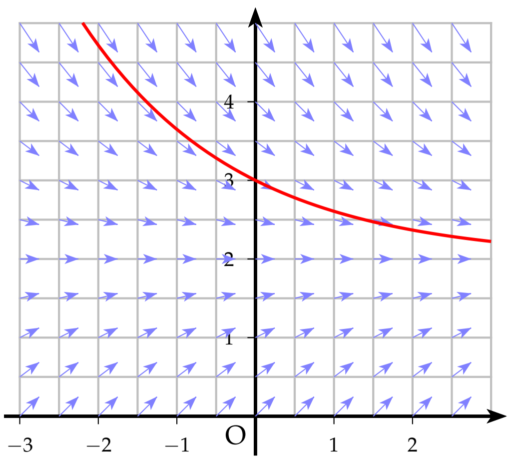
$$(y - y_0)\,(x) = k\,e^{ax} \;\Leftrightarrow\; y(x) = k\,e^{ax} + y_0 = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$$

Exemple : Déterminer f solution de $y' = -0,5y + 1$ telle que $f(0) = 3$.

La fonction f est de la forme : $f(x) = k\,e^{-0,5x} - \dfrac{-1}{-0,5} = k\,e^{*0,5x} + 2$.

$f(0) = 3 \;\Leftrightarrow\; k + 2 = 3 \;\Leftrightarrow\; k = 1$, La fonction f est donc : $f(x) = e^{-0,5x} + 2$.

On peut visualiser la fonction f dans le champ des solutions



2.3 Situation menant à une équation différentielle

Définition 3 : La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi :
« La vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu ambiant. »

- On pose $\theta(t)$ la température du corps en fonction du temps écoulé en minutes.
- On appelle a le coefficient de proportionnalité liant la vitesse de refroidissement à la différence de température.
- On suppose que la température de l'air ambiant est θ_0.

1) Écrire l'équation différentielle que doit vérifier θ en fonction de a et θ_0.

2) On donne $\theta_0 = 25$°C et l'on sait que la température du corps passe de 100°C, à l'instant initial, à 70°C, au au bout de 15 minutes.

   a) Déterminer l'expression de θ en fonction du temps écoulé.
   On donnera le coefficient a à 10^{-3} près.

b) Au bout de combien de temps la température du corps sera-t-elle de 40°C ? En donner une valeur arrondie à la seconde près.

c) Écrire un algorithme en Python qui permet de trouver à la minute près au bout de combien de temps le corps ne refroidit plus (température à moins de 1°C de la température de l'air ambiant) ?

1) La variation de température est donnée par la dérivée de θ.

D'après la loi de Newton, on a : $\theta' = a(\theta - \theta_0) \Leftrightarrow \theta' = a\,\theta - a\,\theta_0$.

L'équation différentielle est linéaire du premier ordre.

2) a) Les solutions de l'équation sont de la forme : $\theta(t) = k\,e^{at} + \theta_0,\ k \in \mathbb{R}$.

$$\theta(0) = 100 \Leftrightarrow k + \theta_0 = 100 \Leftrightarrow k = 100 - \theta_0 = 75$$

$$\theta(15) = 70 \Leftrightarrow 75e^{15a} + 25 = 70 \Leftrightarrow e^{15a} = \frac{70-25}{75} = 0,6$$

$$\overset{\ln}{\Leftrightarrow} 15a = \ln 0,6 \Leftrightarrow a = \frac{\ln 0,6}{15} \approx -0,034$$

Conclusion : $\theta(t) = 75\,e^{-0,034t} + 25$

b) $$\theta(t) = 40 \Leftrightarrow 75\,e^{-0,034t} + 25 = 40 \Leftrightarrow e^{-0,034t} = \frac{40-25}{75} = 0,2$$

$$\overset{\ln}{\Leftrightarrow} -0,034t = \ln 0,2 \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 0,2}{0,034} \approx 47,34' \approx 47'20''$$

Après 47 minutes et 20 secondes la température du corps est de 40°C.

c) On peut proposer l'algorithme suivant :

```
from math import*
T=100
t=0
while abs(T-25)>=26:
    t+=1
    T=75*exp(-0.034*t)+25
print(t)
```

On obtient : $t = 127$

Au bout 1 h 07 le corps ne refroidit plus.

2.4 Équation de la forme $y' = ay + f(x)$

Théorème 6 : Pour résoudre une équation du type : $y' = ay + f(x)$ où f est une fonction continue sur I :

- On cherche une solution particulière y_0.
- Puis on détermine l'ensemble des solutions en se ramenant à l'équation homogène : $y' = ay$.

Remarque : Dans la pratique, on donnera la solution particulière y_{part} où la méthode pour la trouver.

Exemple : Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 2y = 1 - 6x$.

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution affine comme solution.
2) En déduire alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).

⇒ ⇒

1) La solution particulière est un fonction affine donc : $y_0(x) = ax + b$.

   y_0 doit vérifier (E) donc :

   $y_0' - 2y_0 = 1 - 6x \;\Leftrightarrow\; a - 2(ax + b) = 1 - 6x \;\Leftrightarrow\; -2ax + a - 2b = -6x + 1$

   Par identification : $\begin{cases} -2a = -6 \\ a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$ d'où $y_0(x) = 3x + 1$.

2) Soit y une solution de (E), comme y_0 est solution, on a le système suivant :

$$\begin{cases} y' - 2y = 1 - 6x \\ y_0' - 2y_0 = 1 - 6x \end{cases}$$

   Par soustraction terme à terme :

$$y' - y_0' - 2(y - y_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; (y - y_0)' = 2\,(y - y_0)$$

   On obtient alors $y - y_0 = k\,e^{2x}$ donc $y(x) = k\,e^{2x} + 3x + 1$.

   On vérifie facilement que ces solutions vérifie (E).

2.5 Résolution par une méthode numérique : méthode d'Euler

Théorème 7 : Principe de la méthode d'Euler

Soit f une fonction dérivable sur I, d'après l'approximation affine, pour pas p petit :

$$\forall x, x+p \in \mathrm{I}, \quad f(x+p) = f(x) + pf'(x)$$

Si l'on dispose d'une relation entre f et f' par une équation différentielle ainsi que d'une condition initiale, on peut, en appliquant l'approximation affine de façon itérative, déterminer de proche en proche des valeurs approchée de $f(x)$ sur I.

Remarque : C'est par cette méthode que l'on a tracé, cf première, la fonction exponentielle définie par $y' = y$ et $y(0) = 1$.

Exemple : Soit l'équation différentielle : $\begin{cases} y' + 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

C'est une équation différentielle linéaire du premier degré mais qui n'est pas à coefficients constant donc que l'on ne sait pas résoudre à notre niveau.

Comme l'on dispose d'une condition initiale, on peut alors utiliser une méthode numérique : la méthode d'Euler.

De l'équation différentielle, on a : $y' = 1 - 2xy$

D'où la formule de récurrence pour y :

$$y(x+p) = y(x) + py'(x) = y(x) + p(1 - 2xy) = y(x)(1 - 2px) + p$$

Pour le 1er point $y(0+p) = y(0)(1-0) + p = p$ d'où $\mathrm{M}_1(p\ ,\ p)$

Pour le 2e point $y(p+p) = y(p)(1-2p^2)+p = 2p-2p^3$ d'où $\mathrm{M}_2(2p\ ;\ 2p-2p^3)$

Et ainsi de suite.

Pour obtenir la courbe sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$ avec un pas p, on automatise avec la fonction courbe(a,p) en Python :

Calculer la valeur de y avant d'incrémenter x

courbe$(3\ ,\ 0.1)$ donne :


```python
import matplotlib.pyplot as plt
def courbe(a,p):
    x=0 ; X=[x]
    y=0 ; Y=[y]
    borne=int(a/p)
    for i in range(borne):
        y=y*(1-2*p*x)+p
        x+=p
        X.append(x)
        Y.append(y)
    plt.plot(X,Y)
    plt.show()
    return X,Y
```

Remarque : Cette méthode est souvent utilisée en sciences expérimentales car elle ne demande pas de résoudre formellement l'équation différentielle.

À titre indicatif, la solution formelle est : $y(x) = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$