Exercices probabilités conditionnelles et loi binomiale

EXERCICE 1

Métropole 2024

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche.

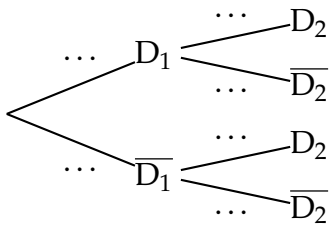
Pour la premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est $\frac{1}{3}$.
S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à droite pour le déplacement suivant est égale à $\frac{3}{4}$.
S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à gauche pour le déplacement suivant est égale à $\frac{1}{2}$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

- D_n l'évènement : « le robot se déplace à droite lors du n-ième déplacement » ;
- p_n la probabilité de l'évènement D_n. On a donc $p_1 = \frac{1}{3}$.

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1) Compléter l'arbre pondéré suivant :



2) Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.
3) Montrer que $p_2 = \frac{7}{12}$.
4) Le robot s'est déplacé à gauche lors du deuxième déplacement. Quelle est la probabilité qu'il se soit déplacé à droite lors du premier déplacement ?

Partie B : étude de la suite (p_n).

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un grand nombre d'étapes.

1) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.
   On pourra s'aider d'un arbre.
2) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$.
   b) La suite (p_n) est-elle convergente ? Justifier.
3) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 1$, par $u_n = p_n - \frac{2}{3}$.
   a) Montrer que (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
   b) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte.

Partie C

Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe égale à $\frac{3}{4}$.
Quelle est la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

EXERCICE 2

Métropole 2021

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 5 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou « négatif ».
On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.
On note $p(\text{E})$ la probabilité d'un événement E.
On considère les évènements suivants :

- D : « la pièce est défectueuse » ;
- T : « la pièce présente un test positif » ;

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle est défectueuse est égale à $0,98$;
- la probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à $0,97$.

Partie I

1) Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2) a) Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.
   b) Démontrer que : $p(\text{T}) = 0,077\,5$.
3) On appelle **valeur prédictive positive** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à $0,95$.
   Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

Partie II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.
On rappelle que : $p(\text{D}) = 0,05$.

1) Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
2) Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse. On donnera un résultat arrondi au centième.
3) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 3

Covoiturage

Partie A

Louise se rend au travail en voiture. Sa collègue Zoé ne possède pas de voiture.

Chaque matin, Louise propose donc à Zoé de l'emmener. Quelle que soit la réponse de Zoé, Louise lui propose de la ramener le soir.

On se place un jour donné. On dispose des informations suivantes :

- la probabilité que Louise emmène Zoé le matin est 0,55 ;
- si Louise a emmené Zoé le matin, la probabilité qu'elle la ramène le soir est 0,7 ;
- si Louise part seule le matin, il y a 24 % de chance qu'elle revienne avec Zoé.

On note M et S les événements suivants :

- M : « Louise emmène Zoé le matin » ;
- S : « Louise ramène Zoé le soir ».

1) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
2) Calculer $p(\text{M} \cap \text{S})$. Traduire ce résultat par une phrase.
3) Démontrer que la probabilité de l'événement S est égale à 0,493.
4) On sait que Louise a ramené Zoé le soir.
   Quelle est la probabilité que Louise l'ait emmenée le matin ?

Partie B

L'entreprise de Zoé affirme que 35 % de ses salariés pratiquent le covoiturage. On interroge alors 254 salariés et on appelle X, la variable aléatoire associée au nombre de salarié pratiquant le covoiturage. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(254\,;\,0,35)$.

Calculer $\text{E}(X)$, $\text{V}(X)$ et $\sigma(X)$.

EXERCICE 4

Feux tricolores

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 km.h^{-1}.
Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés.

Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\dfrac{2}{3}$.

Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps en minute mis par l'élève pour aller au lycée.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Exprimer T en fonction de X.
3) Déterminer $\text{E}(T)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
4) L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
   a) Peut-il espérer être à l'heure ?
   b) Calculer la probabilité qu'il soit en retard.

EXERCICE 5

Marche aléatoire

Une marche aléatoire est un modèle mathématique d'un système possédant une dynamique discrète composée d'une succession de pas aléatoires, ou effectués « au hasard ». Ces pas aléatoires sont de plus totalement décorrélés les uns des autres, propriété fondamentale, appelée caractère markovien du processus. C'est pour cela que l'on parle parfois de « marche de l'ivrogne ». L'idée de marche aléatoire a été introduite en 1905 par le biostatisticien Karl Pearson pour rendre compte des migrations d'une population de moustiques dans une forêt.

Le modèle de marche aléatoire le plus simple est celui de la marche aléatoire discrète à une dimension.

Soit un individu sur un escalier. Il tire à pile ou face pour décider si le prochain pas sera vers le haut ou vers le bas. À chaque étape, il n'y a donc que deux choix possibles un pas en avant ou un pas en arrière.

On effectue n lancements d'une pièce de monnaie et on appelle N, la variable aléatoire associée au nombre de fois où « pile » est obtenu.

1) a) Montrer que N suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   b) Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de N en fonction de n.
2) On appelle X la position de l'individu après n déplacements dont le point de départ est 0.
   a) Exprimer X en fonction de N et n.
   b) En déduire l'espérance de X et sont écart-type en fonction de n.
3) On prend $n = 100$
   a) Quelle est la probabilité que l'individu soit revenu à son point de départ après 100 déplacements ?
   b) Donner l'intervalle $\mathrm{I} = [\mathrm{E}(X) - \sigma(X)\,;\, \mathrm{E}(X) + \sigma(X)]$.
   c) Déterminer la probabilité que X appartiennent à l'intervalle I
4) On donne le programme en langage Python permettant de visualiser le chemin de l'individu sur n déplacements.

   a) Rentrer cet algorithme sur votre calculatrice.
   b) Exécuter ma(400)
   c) Où se trouve l'individu après 400 déplacements ?
   d) Soit $\mathrm{I}' = [\mathrm{E}(X) - \sigma(X)\,;\, \mathrm{E}(X) + \sigma(X)]$ Se trouve-t-il dans l'intervalle I' ?

```
from random import*
import ti-plotlib as plt
def ma(n):
    X=[0]
    Y=[0]
    y=0
    for i in range(1,n+1):
        y=y+choice([-1,1])
        X.append(i)
        Y.append(y)
    plt.cls
    plt.auto_window(X,Y)
    plt.grid(20,5,"solid")
    plt.line(0,0,n,0)
    plt.plot(X,Y,".")
    plt.show_plt()
    return y
```