Rappels de probabilité
Succession d'épreuves indépendantes.
Loi binomiale

Rappels probabilité

EXERCICE 1

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On tire successivement deux boules de l'urne.
Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience et son nombre d'éléments.

EXERCICE 2

On lance un dé truqué. Après un relevé statistique, on a pu déterminer que les probabilités d'apparition de chaque face sont telles que :

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) \text{ et } p(6) = 3p(1)$$

Déterminer la loi de probabilité p.

EXERCICE 3

On donne $p(\mathrm{A}) = 0,3$, $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,7$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,2$. Déterminer $p(\overline{\mathrm{B}})$.

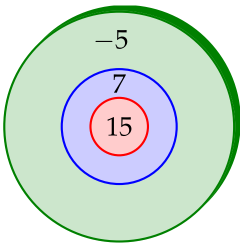
EXERCICE 4

Une urne contient 6 boules : 4 rouges (numérotées de 1 à 4) et 2 bleues (numérotées 5 et 6). On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on note sa couleur.

1) Calculer la probabilité des événements suivants :
   R « tirer deux boules rouges » et C « tirer deux boules de même couleur ».
2) Soit X la variable aléatoire associées au nombre de boules bleues obtenues.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$ puis donner $\sigma(X)$ à 10^{-2} près.

EXERCICE 5

La cible, d'un jeu de fléchettes, est constituée de disques de rayons de 5, 10 et 20 cm.
Un joueur atteint toujours la cible et on admet que la probabilité qu'il atteigne une zone est proportionnelle à son aire. Lorsqu'il atteint la zone rouge, il gagne 15 €, la couronne bleue 7 € et perd 5 € pour la zone verte.
Soit X la variable aléatoire qui indique le gain du joueur.



1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Déterminer l'espérance de gain du joueur. Le jeu est-il favorable au joueur ?
3) Déterminer l'écart type de la variable X.
   Que cela signifie-t-il dans le contexte de l'énoncé ?

Probabilité conditionnelle

EXERCICE 6

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.
On dispose d'un test de dépistage du virus qui a les caractéristiques suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».

1) a) Préciser les valeurs des probabilités $p(\mathrm{V})$, $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{T})$, $p_{\overline{\mathrm{V}}}(\overline{\mathrm{T}})$.
Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   b) En déduire la probabilité de l'événement $\mathrm{V} \cap \mathrm{T}$.
2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.
3) a) Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de "chances" que la personne soit réellement contaminée ».
   b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif. Que peut-on en conclure.

EXERCICE 7

Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture.
Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.
Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.
Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail dans 60 % des cas.

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse. On se justifiera.
« Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

EXERCICE 8

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.

Les huîtres sont de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.

Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur. On suppose que toutes les huîtres ont la même chance d'être choisies.

On considère les événements suivants :

- J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,

- C : « l'huître prélevée est de calibre n° 3 ».

1) Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
2) Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.
3) Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est $0,695$.
4) Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

EXERCICE 9

Un entrepreneur décide d'installer un logiciel anti-spam, Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (messages malveillants, publicités, etc.) et les déplace dans un fichier appelé « dossier spam ». Le fabricant affirme que 95 % des spams sont déplacés. De son côté, l'entrepreneur sait que 60 % des messages qu'il reçoit sont des spams. Après installation du logiciel, il constate que 58,6 % des messages sont déplacés dans le dossier spam.

Pour un message pris au hasard, on considère les évènements suivants :
D : « le message est déplacé » et S : « le message est un spam ».

1) Calculer $p(\mathrm{S} \cap \mathrm{D})$.
2) On choisit au hasard un message qui n'est pas un spam. Montrer que la probabilité qu'il soit déplacé est égale à 0,04.
3) On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité que ce message soit un spam ? Interpréter ce résultat.

EXERCICE 10

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

		Retards 1er mois			
		0	1	2 ou plus	Total
Retards 2e mois	0	262	212	73	547
	1	250	73	23	346
	2 ou plus	60	33	14	107
	Total	572	318	110	1 000

1) **Lecture du tableau**. On choisit au hasard un individu de cette population.
   a) Déterminer la probabilité P que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois.
   b) Déterminer la probabilité P' que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.
2) On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul). On fait les hypothèses suivantes :
   - si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,46.

- si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,66.
- si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est encore 0,66.

On note A_n : l'événement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n »,
B_n : l'événement « l'individu a eu exactement un retard le mois n »,
C_n : l'événement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».
Les probabilités de A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n et r_n.

a) Pour le premier mois, les probabilités p_1, q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1, q_1 et r_1.
b) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, et r_n. On pourra s'aider d'un arbre.
c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = -0,2p_n + 0,66$.
d) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = p_n - 0,55$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Indépendance

EXERCICE 11

Le stock d'un magasin de meuble est constitué de 55 % de canapés, 30 % de fauteuils et le reste en poufs. De plus 14 % des canapés, 20 % des fauteuils et 42 % des poufs sont en cuir.
Un client se présente et choisit un meuble. On considère les événements suivants :
F : « Le meuble choisi est un fauteuil » et C : « Le meuble choisi est en cuir ».
A : « Le meuble choisi est un canapé » et B : « Le meuble choisi est un pouf ».

Montrer que les événements F et C sont indépendants.

EXERCICE 12

Le club informatique d'un lycée compte 7 élèves de seconde, 3 de première et n de terminale. Parmi les 10 filles de ce club, 6 sont en terminale.
On tire au hasard un membre du club et on considère les événements suivants :
F : « Le membre est une fille » et T : « Le membre est en terminale ».

Déterminer n pour que les événements F et T soient indépendants.

Loi binomiale

EXERCICE 13

On replacera les questions suivantes dans le contexte d'une loi binomiale.

1) On tire successivement avec remise 8 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 5 rois ?
2) Un QCM comprend 10 questions auxquelles on répond « Vrai » ou « Faux ». Un élève répond au hasard à toutes les questions. A-t-il autant de chances de répondre exactement à 3 questions que de répondre exactement à 7 ?

3) On lance 8 fois un dé parfait.
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois fois un nombre pair ?

Exercice 14

La probabilité qu'une photocopieuse tombe en panne durant un mois est de 0,05. Les pannes sont indépendantes les unes des autres et on appelle X le nombre de pannes durant un an.

1) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2) Calculer les probabilités à 10^{-3} près que la photocopieuse :
   a) ne tombe pas en panne durant 1 an ;
   b) tombe en panne plus de 2 fois durant 1 an.

Exercice 15

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un tournoi de tennis de table. La probabilité que A gagne une partie est de 0,6. On joue 9 parties, le vainqueur est celui qui gagne le plus de parties. Quelle est la probabilité que B gagne le tournoi ?

Exercice 16

Pour les questions suivantes, X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

1) $n = 6$ et $p = 0,4$. Donner puis tracer la loi de probabilité de X.
2) $n = 15$, $p = 0,8$. Pourquoi peut-on affirmer que $p(X = 12) > p(X = 8)$?
Calculer $p(X = 8)$ et $p(X = 12)$ pour vérifier.
3) $n = 10$ et $E(X) = 3$. Calculer $p(X \leqslant 3)$ et $p(X \geqslant 7)$.
4) $p = 0,2$ et $\sigma(X) = 2$. Calculer $p(X \leqslant 2)$ et $p(X > 2)$

Exercice 17

Une épreuve consiste à lancer deux dés cubiques parfaits, l'un bleu et l'autre rouge, dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note l'événement :
S : « la somme des numéros des deux dés est supérieure ou égale à 10 ».
On répète dix fois de suite cette épreuve dans les mêmes conditions.

1) Quelle est la probabilité de S lors d'une épreuve ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois la réalisation de S lors des dix épreuves ? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3} près.
3) On répète cette épreuve n fois de suite.
   a) Déterminer la probabilité p_1 d'obtenir au moins une fois l'événement S.
   b) Quel est le nombre minimum d'épreuves pour que p_1 soit supérieure à 0,9 ?

Exercice 18

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.

- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On note, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'événement :

E_n : « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ».

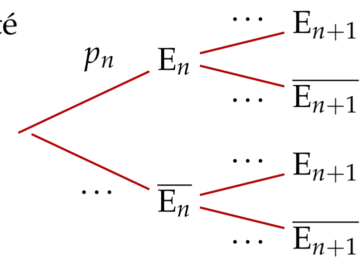
On note p_n la probabilité de l'événement E_n.

On a ainsi : $p_1 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1,\ 0 \leqslant p_n < 1$.

1) a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

   b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2) a) Recopier et compléter l'arbre de probabilité donné ci-contre



   b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

   c) Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison q.

   En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.

   d) En déduire la limite de la suite (p_n).

   e) On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme ci-contre :

   À quoi correspond l'affichage final m ?
   Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?
   On pose $k = 3$, déterminer m.

Saisir k
$p \leftarrow 0$
$m \leftarrow 1$
tant que $p < 0,05 - 10^{-k}$ **faire**
  $p \leftarrow 0,2p + 0,04$
  $m \leftarrow m + 1$
fin
Sorties : Afficher m

3) Cette entreprise emploie 220 salariés. On admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$. On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues. On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

   a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   b) Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ puis déterminer la probabilité que $X \in [\mathrm{E}(X) - \sigma(X)\ ;\ \mathrm{E}(X) + \sigma(X)]$

Problèmes de seuil

EXERCICE 19

Dans une entreprise, 400 employés ont réservé un repas au self de l'entreprise. Les statistiques montrent que lorsqu'un employé a réservé, 6 % ne mange pas à la cantine. On appelle X le nombre de personnes mangeant réellement au self

1) a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b) Déterminer l'espérance et l'écart type de X.
2) Le gestionnaire du self ne voulant pas gâcher de nourriture souhaite savoir le nombre minimal k de repas à préparer tout en restant sûr à au moins 95 % que tous les employés se présentant auront un repas.
   a) À l'aide de la calculatrice, déterminer k.
   b) Même question avec un seuil de 99 %.

EXERCICE 20

La compagnie Oui SNCF doit remplir un train de 180 places. Comme elle sait que le taux de défections habituel (indépendantes les unes des autres) des personnes ayant acheté un billet est de 8 %, elle décide de mettre plus de 180 billets en vente. On appelle n le nombre de billet mis en vente et X le nombre de passagers prenant réellement le train.

1) a) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b) Déterminer l'espérance de X en fonction de n.
2) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre de billets à vendre pour être sûr au seuil de 95 % de ne pas vendre trop de billets que ne peut contenir le train.

EXERCICE 21

Un collectionneur de pièces de monnaies, achète un grand lot de nouvelles pièces rares et anciennes. Le vendeur assure que parmi ce lot, 5 % de pièces sont des pièces d'origine française.
Le collectionneur tire successivement 80 pièces du sac en les remettant une fois avoir vu son origine. On note X le nombre de pièces françaises tirées.

1) Déterminer la loi de probabilité de X en déduire l'espérance $E(X)$.
2) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une pièce d'origine française ?
3) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 % correspondant à X.
4) Le collectionneur réalise les 80 tirage et ne tire que 2 pièces françaises.
   Peut-il affirmer que le vendeur lui a menti à un niveau de confiance de 95 % ?

EXERCICE 22

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

- la formation en conduite accompagnée ;
- la formation traditionnelle.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation en conduite accompagnée dont 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres à leur deuxième présentation.
- 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation traditionnelle dont 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 a la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe et on considère les événements :
A : « la personne a suivi une formation en conduite accompagnée » ;
R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;
R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;
R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1) Modéliser la situation par un arbre pondéré.
   On donnera les probabilités suivantes sous forme d'une fraction irréductible.

2) a) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation en conduite accompagnée et réussi l'examen à sa deuxième présentation.

   b) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation.

   c) La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation en conduite accompagnée ?
   Que peut-on dire des événements A et R_2 ?

3) On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.

   a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   b) Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

4) On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300.

   a) Dans le contexte de cette question, préciser un événement dont la probabilité est égale à $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

   On considère la fonction Python seuil ci-contre, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$.

```
def seuil(p):
    n=1
    while 1-(5/6)**n<=p:
        n=n+1
    return n
```

   b) Quelle est la valeur renvoyée par la commande seuil(0.9) ?
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 23

Compagnie aérienne

Partie 1

Julien prend l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.

S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.

Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.

Julien est parti en retard et la probabilité qu'il manque son bus est de $0,8$.

S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport par compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de $0,5$ d'être à l'heure à l'aéroport.

On notera :

- B l'évènement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
- V l'évènement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1) Donner la valeur de $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{V})$.
2) Représenter la situation par un arbre pondéré.
3) Montrer que $p(\mathrm{V}) = 0,6$.
4) Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Partie 2

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.

Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2) En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?
3) Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement.
   Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
4) Calculer $p(X \leqslant 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5) La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 €.
   Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet et payer une pénalité de 600 € à chaque passager lésé.
   On appelle :
   - Y : la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;
   - C : la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

On admet que Y suit la loi de probabilité, à 10^{-5} près, donnée par le tableau :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$p(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

a) Déterminer $p(Y = 6)$ à 10^{-5} près.

b) Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y à 10^{-5} près.
En déduire l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.

d) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.