

Produit scalaire et plans dans l'espace

Table des matières

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Produit scalaire | 2 |
| 1.1 | Définition | 2 |
| 1.2 | Propriétés et orthogonalité de deux vecteurs | 3 |
| 2 | Orthogonalité dans l'espace | 4 |
| 2.1 | Droites orthogonales | 4 |
| 2.2 | Droite et plan orthogonaux | 4 |
| 2.3 | Plans orthogonaux | 5 |
| 3 | Équation cartésienne d'un plan | 5 |
| 3.1 | Vecteur normal | 5 |
| 3.2 | Équation d'un plan | 6 |
| 3.3 | Distance d'un point à un plan | 6 |

1 Produit scalaire

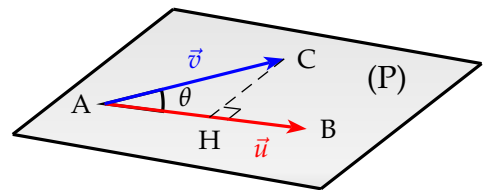
1.1 Définition

Définition 1 : Le produit scalaire dans le plan se généralise à l'espace.

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, tel que :

- **Par le cosinus :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- **Par le projeté :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$
avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
- **Par la norme :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$
- **Par les coordonnées :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$
avec $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$

Démonstration : L'équivalence de ces définitions est identique à la démonstration dans le plan. En effet, on peut toujours trouver un plan (P) passant par un point A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} (cf 1^{re}).



Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

Remarque : On écrira $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.

Le mot « scalaire » renvoie à un nombre réel en opposition au mot « vecteur ».

Pour la définition avec le cosinus, on pourra considérer l'angle (\vec{u}, \vec{v}) , comme un **angle géométrique** $\theta \in [0 ; \pi]$, car la fonction cosinus est paire. Cela explique la symétrie du produit scalaire. Le signe du produit scalaire est celui du $\cos \theta$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ si $\theta < \frac{\pi}{2}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\theta = \frac{\pi}{2}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ si $\theta > \frac{\pi}{2}$

La définition par la norme est aussi appelée formule de **polarisation**.

Elle peut aussi s'écrire sous la forme : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$

Exemple : Soit les vecteurs $\vec{u}(2 ; \sqrt{3} ; 1)$ et $\vec{v}(3 ; \sqrt{3} ; 2)$.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis déterminer une mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) au degré près.

On calcule le produit scalaire avec les coordonnées :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times 3 + (\sqrt{3})^2 + 1 \times 2 = 11$$

On détermine l'angle en utilisant la formule avec le cosinus :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

$$\left. \begin{array}{l} \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \|\vec{v}\| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{11}{2\sqrt{2} \times 4} = \frac{11}{8\sqrt{2}}$$

On a alors : $(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{11}{8\sqrt{2}}\right) \approx 14^\circ$

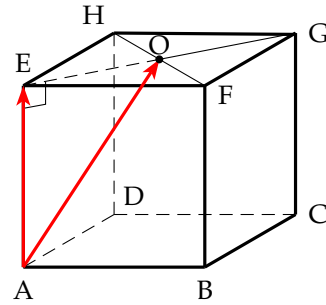
Exemple : ABCDEFGH est un cube d'arête a .

O est le centre de la face EFGH.

Calculer $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AO}$ en fonction de a

O se projette orthogonalement en E sur (AE) donc

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AO} = AE^2 = a^2$$



1.2 Propriétés et orthogonalité de deux vecteurs

Propriété 1 : Le produit scalaire est une forme :

- Symétrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Bilinéaire : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Remarque : La bilinéarité du produit scalaire est une sorte de « distributivité ».

Symétrie et bilinéarité permettent d'écrire les « identités remarquables » suivantes :

$$(\vec{u} \pm \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Que l'on peut transposer avec les normes :

$$\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Propriété 2 : Colinéarité et orthogonalité de deux vecteurs

- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de sens contraires : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si, et seulement si : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Exemple : Soit les points $A(6 ; 8 ; 2)$, $B(4 ; 9 ; 1)$ et $C(5 ; 7 ; 3)$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

$$\overrightarrow{AB} = (-2 ; 1 ; -1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = (-1 ; -1 ; 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \times (-1) + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 0$$

Le triangle ABC est rectangle en A.

2 Orthogonalité dans l'espace

2.1 Droites orthogonales

Définition 2 : Deux droites d_1 et d_2 de vecteurs directeurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont :

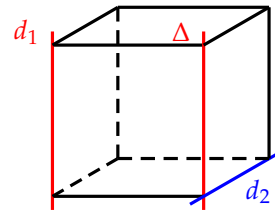
- **orthogonales** si, et seulement si : $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$.
- **perpendiculaires** si et seulement si d_1 et d_2 sont orthogonales et sécantes.

Remarque : On écrit indistinctement $d_1 \perp d_2$ dans les deux cas.

Dans l'espace, on distingue droites « orthogonales » et droites « perpendiculaires ».

Dans le cube :

- les droites d_1 et d_2 sont orthogonales mais pas perpendiculaires.
- les droites Δ et d_2 sont perpendiculaires donc orthogonales.



Exemple : Soit les points $A(2; -5; 1)$ et $B(0; 2; 6)$.

Démontrer que la droite d de vecteur directeur $\vec{u}(-4; 1; -3)$ est orthogonale à la droite (AB)

$$\vec{AB}(-2; 7; 5) \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{AB} = -4 \times (-2) + 1 \times 7 - 3 \times (5) = 8 + 7 - 15 = 0.$$

\vec{u} et \vec{AB} sont orthogonaux donc les droites d et (AB) sont orthogonales.

2.2 Droite et plan orthogonaux

Définition 3 : Un plan (P) de vecteurs directeurs (\vec{u}_1, \vec{u}_2) est orthogonal à une droite d de vecteur directeur \vec{v} si, et seulement si, $u_1 \cdot \vec{v} = 0$ et $u_2 \cdot \vec{v} = 0$

Exemple : Soit les points $A(2; 0; 2)$, $B(4; 0; 0)$, $C(1; -2; 1)$, $D(-1; 1; 0)$ et $E(1; -1; 2)$.

Le plan (ABC) et la droite (DE) sont-ils orthogonaux ?

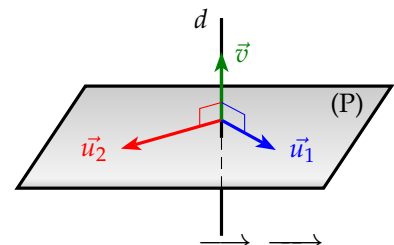
$$\text{On a : } \vec{AB} = (2; 0; -2) \quad \text{et} \quad \vec{AC} = (-1; -2; -1)$$

Les coordonnées de \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas proportionnelles donc (\vec{AB}, \vec{AC}) forment un couple de vecteurs directeurs de plan (ABC) .

$$\text{On a : } \vec{DE} = (2; -2; 2) \quad \text{donc}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{DE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{AC} \cdot \vec{DE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 + 4 - 2 = 0$$

\vec{DE} est orthogonal à \vec{AB} et \vec{AC} donc (ABC) et (DE) sont orthogonaux.



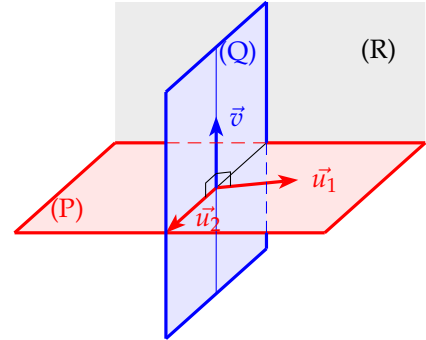
2.3 Plans orthogonaux

Définition 4 : Un plan (P) est orthogonal à un plan (Q) si, et seulement si, il existe une droite d de (Q) orthogonale à (P).

Pour que deux plans (P) et (Q) soient orthogonaux, il suffit qu'un vecteur \vec{v} de (Q) soit orthogonal à un couple de vecteurs directeurs (\vec{u}_1, \vec{u}_2) de (P).

⚠ Si un plan (R) est perpendiculaire à deux plans (P) et (Q), les plans (P) et (Q) ne sont pas nécessairement parallèles entre eux.

⚠ De même deux plans (P) et (Q) peuvent être orthogonaux et avoir des droites parallèles.



3 Équation cartésienne d'un plan

3.1 Vecteur normal

Définition 5 : Un vecteur \vec{n} est normal à un plan (P) si \vec{n} est orthogonal à un couple de vecteurs directeur (\vec{u}, \vec{v}) de (P).

Remarque : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ forme alors une base de l'espace.

Théorème 1 : Deux plans de vecteurs normaux respectifs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont orthogonaux si et seulement si : $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

Remarque : Méthode à privilégier pour montrer l'orthogonalité de deux plans.

Démonstration : Immédiate en se référant à la définition du vecteur normal et de la définition de l'orthogonalité de deux plans.

Théorème 2 : Le plan (P) passant par le point A et de vecteur normal \vec{n} est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Démonstration : Si (\vec{u}, \vec{v}) est un couple de vecteurs directeur de (P) alors pour tout point M, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

On a alors : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot \vec{n} = a \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{n}}_{=0} + b \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{n}}_{=0} = 0$

3.2 Équation d'un plan

Théorème 3 : Une équation cartésienne d'un plan est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } a, b, c \text{ non tous nuls}$$

Le vecteur $\vec{n}(a ; b ; c)$ est alors un vecteur normal au plan.

Démonstration : Par une double implication.

- Soit le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a ; b ; c)$.

Un point M(x ; y ; z) de (P) vérifie alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0 \end{aligned}$$

On pose $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on a alors $ax + by + cz + d = 0$

- Réciproquement, soit : $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non tous nuls, on peut toujours trouver un point A($x_A ; y_A ; z_A$) qui vérifie l'équation, donc :

$$ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \Leftrightarrow ax_A + by_A + cz_A = -d$$

En effet si $a \neq 0$, on peut prendre $x_A = -\frac{d}{a}$ et $y_A = z_A = 0$.

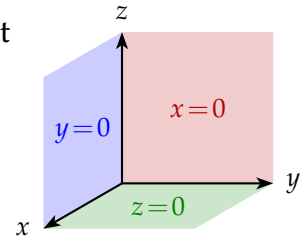
Si M(x ; y ; z) vérifie l'équation, alors $ax + by + cz + d = 0$, et en remplaçant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on obtient : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

Cette égalité traduit alors, en prenant $\vec{n}(a ; b ; c)$, la relation $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Cela montre que l'ensemble des points M est un plan de vecteur normal \vec{n} .

Remarque : Les plans de coordonnées ont respectivement comme équation :

- $z = 0$ pour le plan (Oxy)
- $y = 0$ pour le plan (Oxz)
- $x = 0$ pour le plan (Oyz)



Exemple : Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par le point A(3 ; 5 ; 2) et de vecteur normal $\vec{n}(2 ; -3 ; -1)$.

$$\text{Soit } M(x ; y ; z) \text{ un point de (P), on a : } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \\ z-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-3) - 3(y-5) - (z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - z + 11 = 0$$

3.3 Distance d'un point à un plan

Définition 6 : **Projeté orthogonal.**

Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d ou un plan (P) est le point d'intersection H de la droite d ou du plan (P) et de la perpendiculaire à cette droite ou à ce plan passant par le point A.

Théorème 4 : Distance d'un point à un plan.

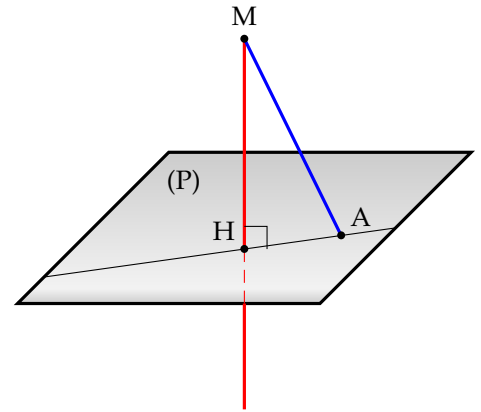
On appelle distance d'un point M au plan (P) , la longueur MH où H est le projeté orthogonal de M sur le plan (P) . Cette distance est la plus courte distance entre le point M et un point du plan (P) .

Démonstration : Soit H le projeté orthogonal du point M sur le plan (P) et A un point de (P) distinct de H .

La droite (MH) est orthogonale au plan (P) donc elle est orthogonale à toutes droites du plan (P) et donc à la droite (AH) .

Le triangle AMH est rectangle en H , d'après le théorème de Pythagore : $AM^2 = AH^2 + MH^2$.

Comme $AH \neq 0$ alors $AM > MH$. La distance MH est la plus courte distance de M à un point du plan (P) .



Exemple : Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $A(7; -1; 4)$ sur le plan (P) d'équation : $2x - y + 3z + 1 = 0$.

En déduire la distance du point A au plan (P) .

- La droite orthogonale d à (P) passant par A a pour vecteur directeur, un vecteur normal à (P) donc $\vec{n}(2; -1; 3)$.

$$d \text{ a alors pour représentation paramétrique : } \begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Les coordonnées de H vérifie le système de la droite d et l'équation du plan (P) . En remplaçant les coordonnées de H en fonction de t dans l'équation de (P) :

$$2(7 + 2t) - (-1 - t) + 3(4 + 3t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 14t + 26 = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

On trouve en prenant par $t = -2$ dans d , les coordonnées du point $H(3; 1; -2)$.

- La distance du point H au plan (P) est alors :

$$AH = \sqrt{(3 - 7)^2 + (1 + 1)^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$