Produit scalaire et plans dans l'espace

Produit scalaire

Exercice 1

Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives : $(1\,;\,\sqrt{3}\,;\,0)$ et $(0\,;\,\sqrt{3}\,;\,1)$.

1) Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$
2) Quelle est, à un degré près, la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Exercice 2

ABCDEFGH est un cube d'arête a tel que O est le centre de la face EFGH et I le milieu du segment [CG].

Faire une figure puis calculer en fonction de a : $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{GI}$

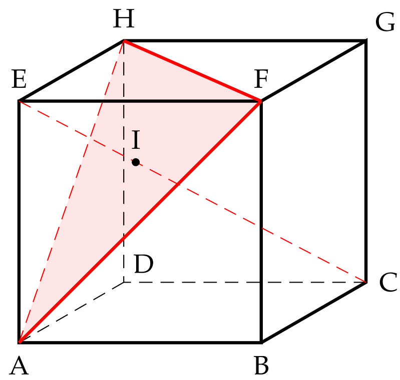
Exercice 3

Soit un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur $a > 0$ et I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1) Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF}\,,\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}\,,\quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF}$$

2) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux.
   On admettra de même que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.
3) En déduire que le point I est le projeté orthogonal de E sur le plan (AFH).
4) a) Justifier que les droites (AF) et (EH) sont orthogonales, ainsi que les droites (AF) et (EI).
   b) En déduire que la droite (AF) est orthogonales la droite (HI).
   c) Établir de même que la droite (AH) est orthogonale à la droite (FI).
5) Que représenté le point I pour le triangle AFH ?



Exercice 4

Soit les points $A(6\,;\,8\,;\,2)$, $B(4\,;\,9\,;\,1)$ et $C(5\,;\,7\,;\,3)$

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2) A, B et C se projettent orthogonalement en A′, B′ et C′ sur le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a) Déterminez les coordonnées des points A′, B′ et C′.
   b) Déterminez la mesure de l'angle géométrique $\widehat{B'A'C'}$.
   Que peut-on dire de la projection orthogonale ?

Équation cartésienne d'un plan

EXERCICE 5

Déterminer, dans chaque cas, une équation cartésienne du plan (P) passant par les points A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1) $A(2\,;\,0\,;\,1)$ et $\vec{n}\,(1\,;-1\,;\,3)$
2) $A(\sqrt{2}\,;-2\,;\,5)$ et $\vec{n}\,(2\,;-3\,;-1)$

EXERCICE 6

Déterminer, dans chaque cas, une équation cartésienne du plan (P) perpendiculaire en A à (AB).

1) $A(2\,;\,0\,;-1)$ et $B(0\,;\,1\,;\,3)$.
2) $A(\sqrt{2}\,;-2\,;\,5)$ et $B(-1\,;\,3\,;\,2)$

EXERCICE 7

Soit le plan (P) d'équation cartésienne : $x - 3y + 2z - 5 = 0$ et $A(2\,;\,3\,;-1)$.
Est-il vrai que le point $H(3\,;\,0\,;\,1)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan (P) ?

EXERCICE 8

Soit les points $A(1\,;-1\,;\,3)$, $B(0\,;\,3\,;\,1)$, $C(2\,;\,1\,;\,3)$, $D(4\,;-6\,;\,2)$ et $E(6\,;-7\,;-1)$.

1) Démontrer que A, B et C définissent un plan (P) de vecteur normal $\overrightarrow{DE}$.
2) En déduire une équation cartésienne du plan (P)

EXERCICE 9

Le plan (P) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = -2 - t + s \\ z = 2t - s \end{cases} \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$

Déterminer une équation cartésienne du plan (P).

Problèmes généraux

EXERCICE 10

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A(2;1;4)$, $B(4\,;-1\,;\,0)$, $C(0\,;\,3\,;\,2)$ et $D(4\,;\,3\,;-2)$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).
2) Soit M un point de la droite (CD).
   a) Déterminer les coordonnées de M pour que la distance BM soit minimale.
   b) On note H ce point M. Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
   c) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.
3) a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,1\,;\,2)$ est normal au plan (BCD).
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

d) Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$.

4) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

EXERCICE 11

Soit les points de l'espace $A(3\,;-2\,;\,2)$, $B(6\,;\,1\,;\,5)$ et $C(6\,;-2\,;-1)$.

Partie A

1) Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2) Soit (P) le plan d'équation cartésienne : $x+y+z-3=0$
   Montrer que (P) est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3) Soit (P') le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminer une équation cartésienne de (P').
4) Déterminer un vecteur directeur de la droite Δ intersection des plans (P) et (P').

Partie B

1) Soit D le point de coordonnées $(0\,;\,4\,;-1)$.
   Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
3) Montrer que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radian.
4) a) Calculer l'aire du triangle BDC.
   b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

EXERCICE 12

Soit les points $A(1\,;\,2\,;\,7)$, $B(2\,;\,0\,;\,2)$, $C(3\,;\,1\,;\,3)$, $D(3\,;\,-6\,;\,1)$ et $E(4\,;-8\,;\,-4)$.

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2) Soit $\vec{u}(1\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur où $b, c \in \mathbb{R}$.
   a) Déterminer b et c pour que $\vec{u}$ soit normal au plan (ABC).
   b) En déduire qu'une équation cartésienne de (ABC) est : $x-2y+z-4=0$.
   c) Le point D appartient-il au plan (ABC) ?
3) On considère la droite d : $\begin{cases} x = 2t+3 \\ y = -4t+5 \\ z = 2t-1 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.
   a) La droite d est-elle orthogonale au plan (ABC) ?
   b) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de d et (ABC).
4) Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

EXERCICE 13

On donne le point $A(-7\,;\,0\,;\,4)$ et le plan (P) d'équation $x+2y-z-1=0$.

Le but de cette question est de calculer la distance ℓ du point A au plan (P).

Soit Δ la droite qui passe par le point A et qui est perpendiculaire au plan (P).

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
2) Déterminer le point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (P).
3) Déterminer ℓ

Exercice 14

Les faces ABC, ACD, ABD d'un tétraèdre ABCD sont rectangles et isocèles en A. On choisit AB pour unité donc le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ est orthonormé.

On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

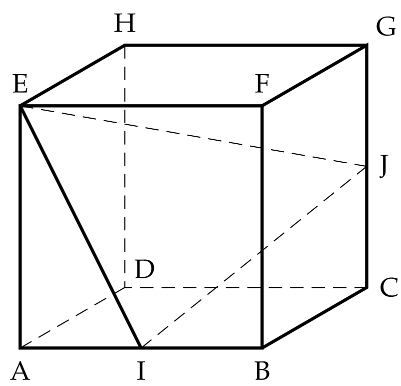
1) Soit (P) le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
   On note H le point d'intersection du plan (P) et de la droite (DF).
   a) Donner les coordonnées des points D et F.
   b) Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan (P).
   d) Calculer les coordonnées du point H.
   e) Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.
2) On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\,\overrightarrow{DF}$.
   On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximal.
   a) Démontrer que $ME^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.
   b) Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
      En déduire que $ME \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
   c) Justifier que α est maximal si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
      En déduire que α est maximal si et seulement si ME^2 est minimal.
   d) Conclure.

Vrai-Faux et QCM

Exercice 15

Soit le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG].

Les dix propositions sont-elles vraies ou fausse ?



1) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}$
2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$
3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$
4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = AB \times IC \times \cos\dfrac{\pi}{3}$

On utilise à présent le repère orthonormal $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

5) Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

6) Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t+1 \\ y = t+1 \\ z = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

7) $6x - 7y + 8z - 3 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (IJ).

8) L'intersection des plans (FIJ) et (ABC) est la droite passant par I et par le milieu de l'arête [DC]

9) Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-4\,;\,1\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (FIJ).

10) Le volume du tétraèdre EFIJ est égal à $\dfrac{1}{6}$.

Exercice 16

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausse. Justifier

Soit le plan (P) d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$ et la droite d dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = -5+3t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

On donne les points $\mathrm{A}(1\,;\,1;\,0)$, $\mathrm{B}(3\,;0\,;\,-1)$ et $\mathrm{C}(7\,;1\,;\,-2)$

Proposition 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -1+t \\ z = -2+t \end{cases}$

Proposition 2 : Les droites d et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 : Les droites d et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 : La droite d coupe le plan (P) au point E de coordonnées $(8;\,-3;\,-4)$.

Proposition 5 : Les plans (P) et (ABC) sont parallèles.

Exercice 17

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausse. Justifier

Soit les points $\mathrm{A}(1\,;2\,;5)$, $\mathrm{B}(-1\,;\,6\,;\,4)$, $\mathrm{C}(7\,;\,-10\,;\,8)$ et $\mathrm{D}(-1\,;\,3\,;\,4)$.

1) **Proposition 1 :** Les points A, B et C définissent un plan.

2) On admet que les points A, B et D définissent un plan.
Proposition 2 : Une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - 2z + 9 = 0$.

3) **Proposition 3 :** Une représentation paramétrique de la droite (AC) est

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}t - 5 \\ y = -3t + 14 \\ z = -\dfrac{3}{2}t + 2 \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

4) Soit les plan (P) : $2x - y + 5z + 7 = 0$ et (P′) : $-3x - y + z + 5 = 0$.
Proposition 4 : Les plans (P) et (P′) sont parallèles.

Exercice 18

Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.

Soit A$(1\,;-1\,;-1)$, B$(1;1;1)$, C$(0;3;1)$ et le plan (P) : $2x + y - z + 5 = 0$.

1) Soit d_1 la droite de vecteur directeur $\vec{u}(2\,;\,-1\,;\,1)$ passant par A.
Une représentation paramétrique de la droite d_1 est :

a) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

c) $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

d) $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

2) Soit d_2 la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

a) La droite d_2 et le plan (P) ne sont pas sécants
b) La droite d_2 est incluse dans le plan (P).
c) La droite d_2 et le plan (P) se coupent au point E$\left(\dfrac{1}{3}\,;\,-\dfrac{7}{3}\,;\,\dfrac{10}{3}\right)$.
d) La droite d_2 et le plan (P) se coupent au point F$\left(\dfrac{4}{3}\,;\,-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{22}{3}\right)$.

3) Soit les propositions
a) L'intersection du plan (P) et du plan (ABC) est réduite à un point.
b) Le plan (P) et le plan (ABC) sont confondus.
c) Le plan (P) coupe le plan (ABC) selon une droite.
d) Le plan (P) et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

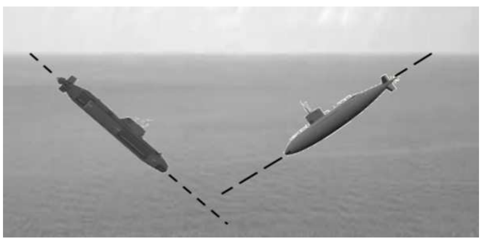
4) Une mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie au dixième de degré est égale à :

a) 22,2 $^\circ$ b) 0,4 $^\circ$ c) 67,8 $^\circ$ d) 1,2 $^\circ$

Application aux sciences

Exercice 19

L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée.
On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante.



À chaque instant t, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dont l'unité est le mètre.
Le plan défini par $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1) On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = 140 - 60t \\ y(t) = 105 - 90t \\ z(t) = -170 - 30t \end{cases}$$

   a) Donner les coordonnées du sous- marin au début de l'observation.
   b) Quelle est la vitesse du sous-marin ?
   c) On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin. Déterminer l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avec le plan horizontal. On donnera l'arrondi de α à $0,1$ degré près.

2) Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\ ;\ 135\ ; -68)$ et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\ ; -405\ ; -248)$ avec une vitesse constante.

   À quel instant t, exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?