Fonctions, E.D., intégrale, suites

EXERCICE 1

Fonction ln

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$.

1) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

   a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que : $\forall x > 0,\ \ f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

3) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{cases}$

1) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 0$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) En déduire la convergence de la suite (u_n).

4) On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

5) a) Compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leqslant h$, où $h > 0$.

```
from math import log as ln
def seuil(h):
    n = 0
    u =7
    while ... :
        n=n+1
        u=...
    return n
```

   b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit seuil(0.01) dans la console Python. Justifier la réponse.

Partie C : calcul intégral

1) Étudier le signe de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2) Interpréter graphiquement l'intégrale : $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3) On admet $\forall x \in [2\,;\,4],\ \ 0,5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0,25x + 0,25$
   En déduire l'encadrement : $1 \leqslant I \leqslant 2$.

Exercice 2

E.D. et fonction exp

Partie A

Soit l'équation différentielle sur $[0\,;+\infty[$: (E) : $y' + \frac{1}{4}y = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

1) Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation (E).
2) Soit l'équation différentielle (E′) : $y' + \frac{1}{4}y = 0$, d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E′).
3) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (20x+8)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.
On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1) a) Justifier que, pour tout réel x positif, $f'(x) = (18-5x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.
   b) En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2) Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.
   a) Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[14\,;15]$.
   b) Compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction solution ci-contre, écrite en langage Python

a	14				
b	15				
$b-a$	1				
m	14.5				
$f(m) > 8$	Faux				

```python
from math import exp
def f(x):
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution():
    a,b=14,15
    while b-a>0.1 :
        m=(a+b)/2
        if f(m)>8:
            a=m
        else:
            b=m
    return a,b
```

   c) Quel est l'objectif de la fonction solution dans le contexte de la question ?

EXERCICE 3

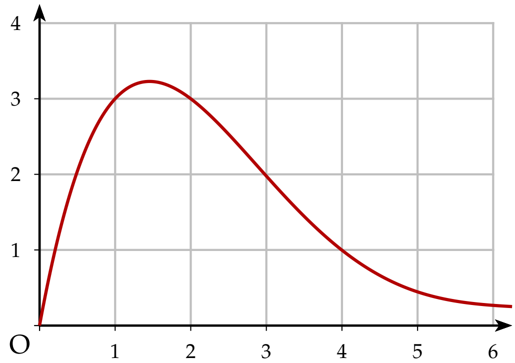
QCM et Vrai-Faux

1) La courbe d'une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ est donnée ci-dessous :

Un encadrement de l'intégrale :

$$I = \int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ est :}$$

a) $0 \leqslant I \leqslant 4$
c) $5 \leqslant I \leqslant 10$
b) $1 \leqslant I \leqslant 5$
d) $10 \leqslant I \leqslant 15$



2) La proposition suivante est-elle vraie ou fausse. On se justifiera.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

3) La proposition suivante est-elle vraie ou fausse. On se justifiera.

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$$