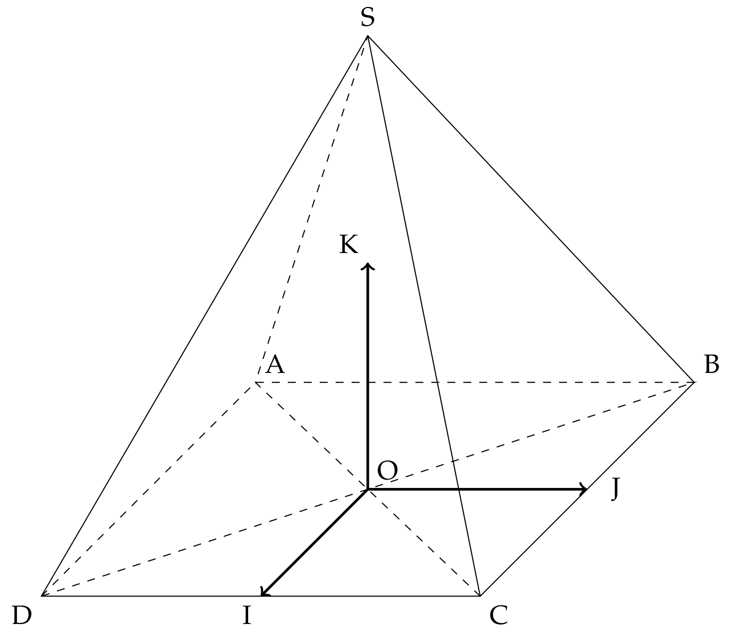
Séance 2 : Géométrie dans l'espace

Exercice 1

Amérique du Nord mai 2026 sujet 1

Dans cet exercice l'unité est le centimètre.
On considère une pyramide à base carrée SABCD comme dans la figure ci-dessous.



- AB = BC = CD = DA = OS = 2 cm ;
- I est le milieu de [CD], J le milieu de [BC] et K le milieu de [OS].

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(O ; \overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OJ} ; \overrightarrow{OK}\right)$.
On admet que $B(-1 ; 1 ; 0)$, $C(1 ; 1 ; 0)$ et $S(0 ; 0 ; 2)$.

Partie A

1) Donner les coordonnées des points A et D.
2) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB}$.
3) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BSC}$ arrondie au dixième de degré près.

Partie B

On se propose de déterminer la distance du point O au plan (SBC).

1) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(0 ; 2 ; 1)$.
   a) Justifier que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (SBC).
   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (SBC) est $2y + z - 2 = 0$.
2) On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC).
   a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (OH) est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Calculer les coordonnées du point H.

c) En déduire que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Partie C

On se propose ici de retrouver le résultat de la **partie B** par une autre méthode.

1) a) Calculer le volume de la pyramide SABCD.

b) En déduire que le volume de la pyramide OCBS est égal à $\dfrac{2}{3}$ cm^3.

2) Déterminer l'aire du triangle SBC.

3) En déduire que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

EXERCICE 2

Amérique du Nord mai 2026 sujet 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère :

- les points $A(4\,;2\,;2)$, $B(5\,;\,-2\,;\,3)$ et $C(1\,;1\,;1)$;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 1+2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- le plan (P) contenant le point A et perpendiculaire à la droite Δ.

1) Vérifier que la droite Δ contient le point $C(1\,;1\,;1)$ mais pas le point A.

2) a) Démontrer qu'une équation du plan (P) est : $2x+y+2z-14=0$.

b) Vérifier que le plan (P) contient le point B mais pas le point C.

3) On considère le point $D(3\,;2\,;3)$.

a) Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).

b) Justifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

d) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.

4) On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

a) Vérifier que les coordonnées du point H sont $\left(\dfrac{73}{29}\,;\,\dfrac{-4}{29}\,;\,\dfrac{51}{29}\right)$.

b) Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\dfrac{3\sqrt{22}}{2}$.

c) En déduire la distance du point D au plan (ABC).

EXERCICE 3

Intégration par parties

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x\ln^2 x$ et $a \in]0\,;\,1]$.

1) On pose $I(a) = \displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que :

$$I(a) = -\frac{a^2}{2}\ln^2 a + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$

2) Que vaut $\displaystyle\lim_{a \to 0} I(a)$