Devoir de mathématiques

À rendre le lundi 2 novembre 2020

EXERCICE 1

Résonnement par récurrence. **(4 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) Écrire une fonction u(n) en Python donnant la valeur u_n.
3) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3^n + n - 1$
4) Déterminer la limite de u_n. La suite (u_n) converge-t-elle ?

EXERCICE 2

Abonnement papier ou numérique **(6 points)**

Un groupe de presse édite un magazine qu'il propose en abonnement. Jusqu'en 2010, ce magazine était proposé uniquement sous forme papier. Depuis 2011, les abonnés du magazine ont le choix entre la version numérique et la version papier. Une étude a montré que, chaque année, certains abonnés changent d'avis : 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique et 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier.
On admet que le nombre global d'abonnés reste constant dans le temps.
On note a_n la proportion d'abonnés ayant choisi la version papier en $2010 + n$ et b_n la proportion d'abonnés ayant choisi la version numérique en $2010 + n$.

1) Justifier que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n$.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06$.
3) Soit (c_n) la suite définie par $c_n = a_n - 0,375$.
   a) Montrer que la suite (c_n) est géométrique.
   b) En déduire l'expression de c_n puis de a_n et b_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (a_n).
4) À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année la proportion d'abonnés à la version papier devient inférieure à la proportion d'abonnés à la version numérique.

EXERCICE 3

Limites de suites **(6 points)**

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes par la méthode de votre choix :

1) $u_n = -n - \cos 2n$
2) $u_n = \dfrac{2n(n+2)}{(n+1)^2}$
3) $u_n = \dfrac{n}{3 + 0,8^n}$
4) $u_n = n^3 - n^2 + 4$
5) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$
6) $u_n = \dfrac{3^n + 2^n}{4^n}$

EXERCICE 4

Vrai-Faux **(4 points)**

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ de termes non nuls.
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\dfrac{2}{u_n}$.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.)

1) « Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente. »
2) « Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1. »
3) « Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante. »
4) « Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0. »