Devoir de mathématiques

À rendre le lundi 4 janvier 2021

Exercice 1

QCM justifié **(5 points)**

Pour chaque question, on choisira la ou les bonnes propositions que l'on justifiera.

1) On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
b. La suite (u_n) est minorée par 1.
c. La suite (w_n) converge vers 1
d. La suite (w_n) est croissante.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2xe^{x^2}$.
b. $f'(x) = (1+2x^2)e^{x^2}$.
c. $f'(x) = (1+2x)e^{x^2}$.
d. $f'(x) = (2+x^2)e^{x^2}$.

3) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1 **b.** 0 **c.** $\dfrac{1}{2}$ **d.** $+\infty$

4) On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ telle que :

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$.

b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

c. Il existe au moins un nombre réel α dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $h(\alpha) = 1$.

d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

5) On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$.

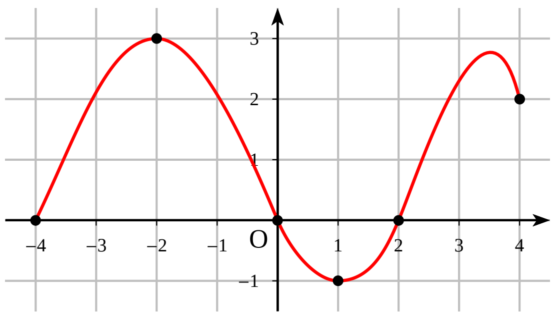
On donne ci-contre la représentation graphique de sa **fonction dérivée** g'.
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.

b. g est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

c. g est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

d. g admet un minimum en 0.



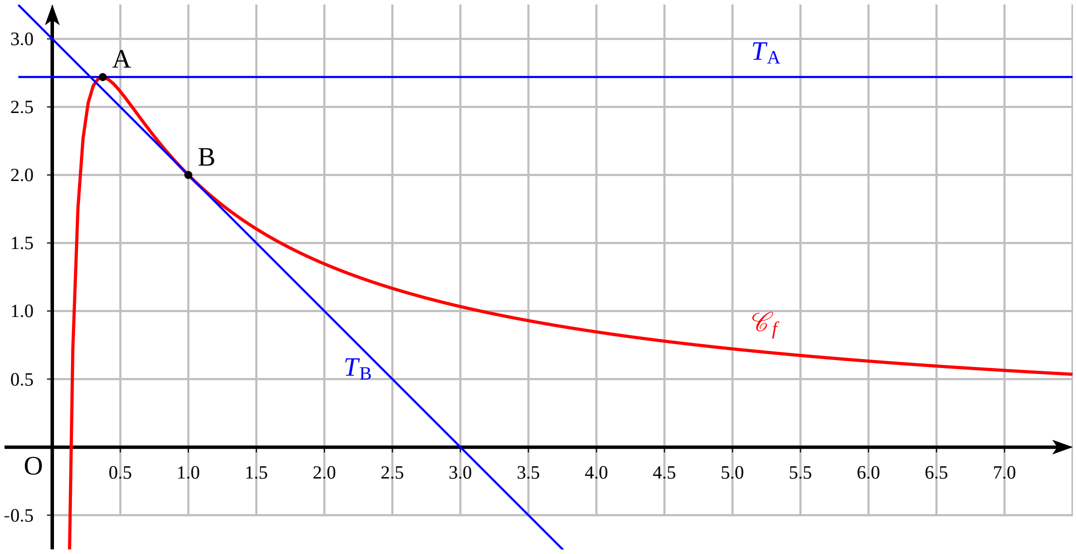
EXERCICE 2

Fonction ln **(7 points)**

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$;
- la tangente T_{A} à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{e}, e\right)$;
- la tangente T_{B} à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1;2)$.

La droite T_{A} est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_{B} coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées (3 ;0) et l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ;3).



Partie A

1) Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.

2) En déduire une équation de la droite T_{B}.

Partie B

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2+\ln x}{x}$.

1) Par le calcul, montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.

2) Déterminer les limites de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$.

3) Calculer le fonction dérivée $f'(x)$ pour $x \in]0\,;+\infty[$

4) Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

5) Calculer la dérivée seconde $f''(x)$ puis déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

EXERCICE 3

Fonction exponentielle **(6 points)**

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four a une température de 225˚C.
On s'intéresse a l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.

On admet qu'on peut modéliser cette évolution a l'aide d'une fonction $f(t)$ définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four. La température ambiante de la boulangerie est maintenue a 25˚C.

On admet alors que la fonction f est de la forme : $f(t) = ae^{-6t} + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tout tout réel $t \geqslant 0$, on a : $f(t) = 200e^{-6t} + 25$
2) Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0\,;+\infty[$.

   Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40˚ C. On note t_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.
3) À l'aide d'un balayage sur la calculatrice, donner la valeur de t_0 au dixième près.
4) On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four. Ainsi, pour un entier naturel n, d_n désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute après sa sortie du four.

   On admet que, pour tout entier naturel n : $d_n = f\left(\dfrac{n}{60}\right) - f\left(\dfrac{n+1}{60}\right)$.

   a) Vérifier que 19 est une valeur approchée de d_0 à 0,1 près, et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   b) Vérifier que l'on a, pour tout entier naturel n : $d_n = 200e^{-0,1n}(1 - e^{-0,1})$.
   En déduire le sens de variation de la suite (d_n), puis la limite de la suite (d_n).
   Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ? (On se justifiera clairement).