Correction du devoir
Du le lundi 1er mars 2021

EXERCICE 1

Tétraèdre **(5 point)**

1) a) On a les points D(0 ; 1 ; 0) et $J\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ d'où $\overrightarrow{DJ}\left(1\,;-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$

De plus $\overrightarrow{BG}\,(0\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$

De façon immédiate les points B, G, I définissent un plan

$$\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0 \text{ et } \overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}=0$$

Donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BI}$ donc $\overrightarrow{DJ}$ est normal à (BGI).

b) Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{BGI})$, on a :

$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{DJ}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-1)-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0 \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2x-y+z-2=0$$

Une équation du plan (BGI) est : $2x-y+z-2=0$.

2) a) d a pour vecteur directeur $2\overrightarrow{DJ}$, comme d passe par F :

une représentation paramétrique de d : $\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=1+t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$

b) Soit $L=d\cap\text{BGI}$. en remplaçant les coordonnées paramétriques de d dans l'équation du plan (BGI), on obtient :

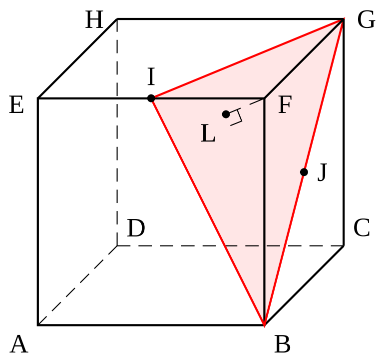
$$2(1+2t)-(-t)+(1+t)-2=0 \Leftrightarrow 6t+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{6}$$

On obtient alors les coordonnées de $L\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{5}{6}\right)$

3) a) $V_{\text{FBGI}}=\frac{1}{3}\times\frac{\text{FI}\times\text{FB}}{2}\times\text{FG}=\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{2}\times 1}{2}\times 1=\frac{1}{12}$.

b) $V_{\text{FBGI}}=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{BGI})\times\text{LF}$

$$\mathscr{A}(\text{BGI})=\frac{3V_{\text{FBGI}}}{\text{LF}}=\frac{\frac{3}{12}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2}}=\frac{1}{4}\times\frac{6}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$



EXERCICE 2

Droite, plan et sphère **(8 points)**

1) Position relative de (P) et de d

a) $\overrightarrow{AB}(3\,;\;1\,;\;1)$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;-1\,;-6)$.

Les coordonnées des vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles, donc les point A, B , C déterminer un plan. De plus :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix} = 3-4+1=0 \text{ et } \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix} = 2+4-6=0$$

Donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{n}$ est normal à (P).

b) Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(P)$, on a :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-1)-4(y-1)+(z-4)=0 \Leftrightarrow x-4y+z-1=0$$

c) $\vec{u}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix} = 1-4+3=0$. Donc $\vec{u}\perp\vec{n}$.

Un vecteur directeur $\vec{u}$ de d est orthogonal à $\vec{n}$, vecteur normal à (P), donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur du plan (P). La droite d est parallèle à (P).

2) Position relative de (P) et de (S)

a) La droite Δ est orthogonale au plan (P) donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ.

Montrons que $H\in(P)$ et que $\overrightarrow{IH}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

$x_H-4y_H+z_H-1=3-4+2-1=0$ donc $H\in(P)$.

$\overrightarrow{IH}(2\,;-8\,;\;2)=2\vec{n}$ donc $\overrightarrow{IH}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

La droite Δ coupe (P) en H.

b) $IH=\sqrt{2^2+(-8)^2+2^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$.

c) Pour tout point M du plan (P) on a $IM\geqslant 6\sqrt{2}>6$.

La distance de (P) au point I est supérieur à 6, donc le plan (P) ne coupe pas la sphère S de centre I est de rayon 6.

3) Position relative de d et de (S).

a) Une représentation paramétrique de la droite d : $\begin{cases}x=1+t\\y=4+t\\z=2+3t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$

b) $M\in S \Leftrightarrow IM^2=6^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-9)^2+z^2=36$.

c) On remplace les coordonnées paramètrique d'un point de d dans l'équation de la sphère :

$$(1+t-1)^2+(4+t-9)^2+(2+3t)^2=36 \Leftrightarrow$$
$$t^2+(t-5)^2+(2+3t)^2=36 \Leftrightarrow t^2+t^2-10t+25+4+12t+9t^2=36$$
$$11t^2+2t-7=0 \;\text{(E)} \quad \Delta=4+308=312>0$$

L'équation (E) admet deux solutions donc la droite d coupe la sphère (S) en deux points distincts.

EXERCICE 3

Vrai-Faux **(5 points)**

1) **Affirmation 1 : Fausse**

   L'équation $(3\ln x - 5)(e^x + 4) = 0$ n'admet qu'une solution solutions.

   $$(3\ln x - 5)(e^x + 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = \frac{5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{\frac{5}{3}} \quad \text{car} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x + 4 > 4 \neq 0.$$

2) **Affirmation 2 : Vraie** : Par récurrence :

   Initialisation : $n = 0$, on a $3 \times 2^0 + 5 \times 0 - 1 = 2 = u_0$. La proposition est initialisée.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = 3 \times 2^n - 5n - 1$, montons que $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 5(n+1) - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 5n + 4$.

   $$u_{n+1} = 2u_n - 5n + 6 \overset{\text{HR}}{=} 2(3\times 2^n + 5n - 1) - 5n + 6 = 3\times 2^{n+1} + 10n - 2 - 5n + 6 = 3\times 2^{n+1} + 5n + 4$$

   La proposition est héréditaire.

   Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3 \times 2^n + 5n - 1$.

3) **Affirmation 3 : Fausse**

   Contre exemple : $u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_2 = \dfrac{9}{2}$ et $u_3 = \dfrac{19}{2}$.

   On a : $\dfrac{u_2}{u_1} = 3$ et $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{19}{9}$ donc $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_3}{u_2}$. La suite (u_n) n'est pas géométrique.

4) **Affirmation 4 : Vraie**

   Une représentation paramétrique de la droite d : $\begin{cases} x = -3 + s \\ y = 7 - 2s \\ z = -12 + 5s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$

   Si les droites d et d' sont confondues leurs représentations paramétriques sont équivalentes. Résolvons :

   $$\begin{cases} -3 + s = 2t - 1 \\ 7 - 2s = -4t + 3 \\ -12 + 5s = 10t - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2t + 2 \\ 7 - 2(2t+2) = -4t + 3 \\ -12 + 5(2t+2) = 10t - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2t + 2 \\ 0t = 0 \\ 0t = 0 \end{cases}$$

   On passe de la représentation paramétrique de d à d' avec $s = 2t + 2$.
   Les droites d et d' sont confondues.

5) **Affirmation 5 : Vraie**

   Une représentation paramétrique de la droite (AG) est : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

   $$\overrightarrow{\text{MB}} \cdot \overrightarrow{\text{MD}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t \\ 1-t \\ -t \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -t(1-t) - t(1-t) + t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

   $$3t^2 - 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t(3t-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \text{ ou } t = \frac{2}{3}.$$

   Il y a deux positions sur la droite (AG) pour que le triangle BMD soit rectangle en M : le point A et le point à deux tiers de A sur le segment [AG].

EXERCICE 4

Section plane dans un cube **(2 points)**