Devoir de mathématiques

À rendre le lundi 8 novembre 2021

Exercice 1

Etude d'une suite **(5 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
2) En déduire, en justifiant la réponse, la monotonie et la limite de (u_n).
3) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - n$.
   a) Montrer que (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) Confirmer les résultats trouvés à la question 2)

Exercice 2

Limites de suites **(4 points)**

Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

1) $u_n = \dfrac{5n^2 - 2n}{1 - n^2}$
2) $u_n = \dfrac{\cos n + 4(-1)^n}{n}$
3) $u_n = 2n + 1 - \dfrac{n}{n^2+1}$
4) $u_n = 2^n - 3^n$

Exercice 3

Espèce animale **(7 points)**

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 700 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 15 individus.
Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,7 \\ u_{n+1} = 0,75u_n(1 - 0,1u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1) Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 0,75x(1 - 0,1x)$.

2) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ puis dresser son tableau de variations.

3) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

4) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
   On admettra que la fonction f est continue sur $[0\,;\,1]$.

5) Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
   a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
   b) Le biologiste a programmé en Python la fonction menace() ci-dessous :

```
def menace():
    u=0.7
    n=0
    while u>0,015:
        u=0.75*u*(1-0.1*u)
        n=n+1
    return n
```

   Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4

Somme de termes **(4 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1) Calculer les termes u_1, u_2, u_3.
   Pour les termes u_2 et u_3, on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

2) a) Compléter le programme en Python suivant qui calcule u_n en fonction de n.

```
from math import*
def u(n):
    u=0
    for i in range(.,.):
        u=......
    return u
```

   b) Compléter le tableau suivant :

n	10	50	100	1 000	10 000
u_n	0,819				

   Conjecturer la convergence de la suite (u_n).

3) Montrer que, pour k avec $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

4) En déduire que la suite converge et calculer sa limite.