Devoir de mathématiques

À rendre le mercredi 20 avril 2021

Exercice 1

Tirages de jetons **(4 points)**

Une urne contient 5 jetons verts (numérotés 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés 6 à 9).
On tire simultanément trois jetons de l'urne.
En expliquant clairement vos calculs, déterminer les **probabilités exactes** de :

1) tirer trois jetons verts ;
2) tirer aucun jeton vert ;
3) tirer au plus 2 jetons verts ;
4) tirer exactement 1 jeton vert.

Exercice 2

Anagrammes **(4 points)**

Un anagramme est un mot obtenu par la permutation des lettres d'un mot donné.

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre d'anagrammes du mot PATRICE en expliquant clairement la méthode utilisée.
   a) Commençant et finissant par une consonne.
   b) Commençant et finissant par une voyelle.
   c) Commençant par une consonne et finissant par une voyelle.
2) Déterminer le nombre d'anagramme du mot : ANAGRAMME

Exercice 3

Paradoxe des anniversaires **(4 points)**

Soit un groupe de n personnes. On cherche à déterminer la probabilité d'avoir au moins deux personnes dans ce groupe ayant la même date d'anniversaire. On suppose que toutes les années sont de 365 jours et que la répartition des dates de naissance sur la population est homogène.

1) a) Déterminer le nombre de répartitions possibles de dates d'anniversaire dans un groupe de n personnes.
   b) Déterminer le nombre de répartitions possibles de dates distinctes d'anniversaire dans un groupe de n personnes.
   c) En déduire la probabilité d'avoir au moins deux personnes ayant la même date d'anniversaire dans un groupe de n personnes.
2) On souhaite connaître, à partir de quelle valeur de n la probabilité d'avoir au moins deux personnes ayant la même date d'anniversaire est supérieur à 95 %.

   Pour cela on écrit le programme suivant en Python

   a) Quelle probabilité calcule le programme ?
      Expliquer la formule utilisée.
   b) Quel résultat donne ce programme ?
      Pourquoi parle-t-on de paradoxe des anniversaire ?

```
n=1
p=1
while p>=0,05:
    n=n+1
    p=p*(365-n+1)/365
print(n)
```

EXERCICE 4

Formule **(1 point)**

Démontrer que : $\forall n, p \in \mathbb{N}^*,\ \ 1 \leqslant p \leqslant n, \quad p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$

EXERCICE 5

Tirage de lettres **(7 points)**

Un sac contient les huit lettres : A, B, C, D, E, F, G, H.
Un jeu consiste à tirer simultanément et au hasard deux lettres dans ce sac.
On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle et d'une consonne.

1) Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.
   a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
   b) Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est de $\dfrac{3}{7}$.

2) Pour jouer, le joueur doit payer k euros, k désignant un entier naturel non nul.
   Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 €, sinon il ne remporte rien.
   On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (la somme remportée est déduite de la mise k)
   a) Déterminer la loi de probabilité de G.
   b) Quelle doit être la valeur maximale de k pour que le jeu reste favorable au joueur ?
3) Dix joueurs font chacun une partie. Le lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.
   On note X la variable aléatoire associée au nombre de joueurs gagnant.
   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   b) Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.
   On rappellera la formule utilisée.
   c) Calculer $p(X \geqslant 5)$ à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.
   d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $p(X \leqslant n) \geqslant 0,95$.
   On expliquera la méthode utilisée.