Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 26 janvier 2022

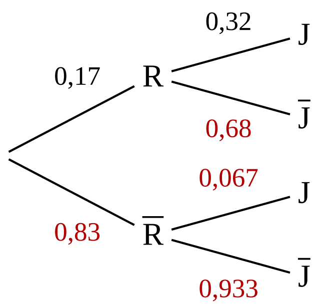
EXERCICE 1

Transport en commun **(9 points)**

Partie A :

1) $p(\mathrm{R}) = 0,17$ et $p_{\mathrm{R}}(\mathrm{J}) = 0,32$.

   On obtient l'arbre suivant :



2) $p(\mathrm{R} \cap \mathrm{J}) = p(\mathrm{R}) \times p_{\mathrm{R}}(\mathrm{J}) = 0,17 \times 0,32 = 0,0544 \approx 0,054$.

3) $p(\mathrm{J}) = 0,11$.

$$p(\mathrm{J}) \overset{\text{prob. totale}}{=} p(\mathrm{R} \cap \mathrm{J}) + p(\overline{\mathrm{R}} \cap \mathrm{J}) \Rightarrow p(\overline{\mathrm{R}} \cap \mathrm{J}) = p(\mathrm{J}) - p(\mathrm{R} \cap \mathrm{J}) = 0,11 - 0,0544$$
$$= 0,0556 \approx 0,056$$

4) $p_{\overline{\mathrm{R}}}(\mathrm{J}) = \dfrac{p(\overline{\mathrm{R}} \cap \mathrm{J})}{p(\overline{\mathrm{R}})} = \dfrac{0,056}{0,83} \approx 0,067$

   La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est donc d'environ 6,7 %.

Partie B :

1) Soit l'expérience : on interroge une une personne sur sa pratique des transports en commun et l'on appelle succès la personne utilise régulièrement les transports en commun avec la probabilité $p = 0,17$.

   On réitère 50 fois cette expérience de façon identique et indépendante (assimilé à un tirage avec remise) et l'on appelle X, la variable aléatoire associée au nombre de succès.

   X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(50\,;\ 0,17)$.

2) $p(X = 5) = \dbinom{50}{5} \times 0,17^5 \times 0,83^{45} = \text{binomFdp}(50\,,\ 0.17\,,\ 5) \approx 0,069$

   Il y a donc une probabilité de 0,069 que, sur 50 personnes interrogées, 5 personnes exactement prennent régulièrement les transports en commun.

3) $p(X < 13) = p(X \leqslant 12) = \text{binomFRép}(50\,,\ 0.17\,,\ 12) \approx 0,929$

   Il y a donc moins de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.

   Cette affirmation est fausse.

4) $\mathrm{E}(X) = np = 50 \times 0,17 = 8,5$

   Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est de 8,5.

EXERCICE 2

Problème de seuil **(4 points)**

1) Soit l'expérience : on interroge une personne se présentant à la cantine et l'on appelle succès la personne est végétarienne de probabilité $p = 0,12$.

On réitère 250 cette expérience de façon identique et indépendante (assimilé à un tirage avec remise) et l'on appelle X, la variable aléatoire associée au nombre de succès.

X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(250\,;\,0,12)$ et $\mathrm{E}(X) = np = 250 \times 0,12 = 30$

2) $p(X > 33) = 1 - p(X \leqslant 33) = 1 - \text{binomFRép}(250\,,\,0,12\,,\,13) \approx 0,244$
Il y a 24,4 % de chance que ce ne soit pas suffisant.

3) On doit déterminer le plus petit k pour que : $p(X \leqslant k) \geqslant 0,95$
À l'aide de la calculatrice. On rentre la fonction :

$Y_1 = \text{binomFRép}(250, 0.12, X)$.

Puis on crée un tableau de valeurs, initialisé à 33 avec un pas de 1. On obtient alors le tableau ci-contre :

X	Y1
33	0.7563
34	0.8111
35	0.8573
36	0.8948
37	0.9245
38	0.9471
39	0.9639
40	0.976
41	0.9844
42	0.9901
43	0.9939

On trouve donc $k = 39$.

Le gestionnaire devra préparer 39 repas végétariens pour être sûr à 95 % que les personnes végétarienne pourront manger un repas végétarien.

Exercice 3

Loi binomiale **(3 points)**

1) $\begin{cases} \mathrm{E}(X) = np \\ \mathrm{V}(X) = np(1-p) \end{cases} \Rightarrow 1 - p = \dfrac{\mathrm{V}(X)}{\mathrm{E}(X)} = \dfrac{27,648}{43,2} = 0,64 \Rightarrow p = 1 - 0,64 = 0,36$

On en déduit alors : $n = \dfrac{\mathrm{E}(X)}{p} = \dfrac{43,2}{0,36} = 120$

2) On calcule $\mathrm{E}(X) = np = 50 \times 0,3 = 15$ et le milieu de l'intervalle $\dfrac{21+9}{2} = 15$

$$p(9 \leqslant X \leqslant 21) = p(X \leqslant 21) - p(X \leqslant 8)$$
$$= \text{binomFRép}(50\,,\,0.3\,,\,21) - \text{binomFRép}(50\,,\,0.3\,,\,8) \approx 0,957$$

L'intervalle $[9\,;\,32]$ est donc bien un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 %.

Exercice 4

Lancers de dé **(4 points)**

1) Les dés sont de couleurs différentes, une issue est un à couple (a, b) avec $a, b \in [\![1, 6]\!]$.
Comme les dé sont bien équilibrés, nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.
Le nombre d'issues possible est $6^2 = 36$.
Il y a 5 résultats donnant une somme égale à 6 : $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$, $(5,1)$.
On a alors : $p(\mathrm{S}) = \dfrac{5}{36} \approx 0,139$.

2) a) On répète n fois de suite un lancer et l'on appelle X, la variable aléatoire associée au nombre de fois où l'on obtient une somme égale à six.
X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,0,139)$.

$$p_1 = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0,139)^n = 1 - 0,861^n.$$

b) $p_1 > 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,861^n > 0,99 \Leftrightarrow 0,861^n < 0,01 \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow} n \ln 0,861 < \ln 0,01$
$\overset{\ln 0,861<0}{\Leftrightarrow} n > \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,861} \approx 30,77$.

Le nombre minimum d'épreuves est donc de 31.