BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 16

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*

EXERCICE 1 (5 points)

Pour chaque question, trois affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de chaque question et la lettre de la réponse choisie pour celle-ci. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 2x - 1)\,e^x$.

   A. La fonction dérivée de f est la fonction définie par $f'(x) = (2x-2)\,e^x$.

   B. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$.

   C. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3}{5+e^x}$.

   Sa courbe représentative dans un repère admet :

   A. une seule asymptote horizontale ;

   B. une asymptote horizontale et une asymptote verticale ;

   C. deux asymptotes horizontales.

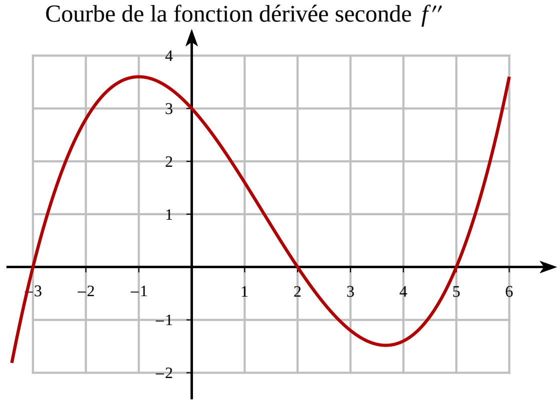
3) On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3,5\,;\,6]$.

   A. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$.

   B. La fonction f admet trois points d'inflexion.

   C. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

Courbe de la fonction dérivée seconde f''



4) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n^2 - 17n + 20$.

   A. La suite (u_n) est minorée.

   B. La suite (u_n) est décroissante.

   C. L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2 021.

5) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 5$$

   On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil():
    u=2
    n=0
    while u<45 :
        u=0.75*u+5
        n=n+1
    return n
```

   Cette fonction renvoie :

   A. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$;

   B. la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$;

   C. la plus grande valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2\,;-1\,;\;0), B(3\,;-1\,;\;2), C(0\,;\;4\,;\;1)\;\text{ et } S(0\,;\;1\,;\;4).$$

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2) a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

   c) Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3) Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

   b) Montrer que les coordonnées du point H sont H$(2\,;2\,;3)$.

4) On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

   Calculer le volume du tétraèdre SABC.

5) a) Calculer la longueur SA.

   b) On indique que $SB = \sqrt{17}$.

   En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

EXERCICE 3 (5 points)

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0,98$ (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0,995$ (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

1) Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.

2) Démontrer que $p(T) = 0,083$.

3) a) Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

   b) Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à $0,95$.

   Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0,103$.

1) Dans cette question 1) on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
   a) Déterminer, en se justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.
   b) Calculer l'espérance $\mathrm{E}(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?
2) Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,75$? Justifier.

EXERCICE 4 (5 points)

Exercice au choix du candidat

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B. Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B. Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme népérien, dérivation

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur $[1\,;4]$ par : $f(x) = -30x + 50 + 35\ln x$.

1) On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   a) Déterminer $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;4]$
   b) Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;4]$.
   c) En déduire les variations de f sur ce même intervalle.
2) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, α, sur l'intervalle $[1\,;4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
3) Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1\,;\,4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1\,;4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :
$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x$$

1) D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.
   On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.
2) Pour tout x de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.
3) a) À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;4]$.
   b) En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

Exercice B

Principaux domaines abordés : Suite, raisonnement par récurrence, programmation

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés. Elle sort les gâteaux du congélateur à -19 °C et les apporte sur la terrasse où la température est de 25 °C.

Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1,3$ °C.

Partie I : Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante c'est-à-dire que l'augmentation de la température est la même minute après minute.

Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur. Ce modèle semble-t-il pertinent ?

Partie II : Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$.
On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

1) Justifier que, pour tout entier n, on a $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$
2) Calculer T_1 et T_2. On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n \leqslant 25$.
   En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?
4) Étudier le sens de variation de la suite (T_n).
5) Démontrer que la suite (T_n) est convergente.
6) On pose pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 25$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n : $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$.
   c) En déduire la limite de la suite (T_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
7) a) Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur.
   Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
   b) Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10 °C.
   Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.
   c) Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

   Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

```
def seuil():
    n=0
    T=.....
    while T.....  :
        T=.....
        n=n+1
    return .....
```