Correction contrôle de mathématiques
Du lundi 13 mai 2024

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse c) :** $\displaystyle\int_0^2 \left(x - x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^2 = \frac{4}{2} + \mathrm{e}^{-2} - 0 - 1 = 1 + \mathrm{e}^{-2}$

2) **Réponse d) :** Non répétition, non ordre donc nombre de parties à 3 élément parmi 35 :
$$\binom{35}{3} = \frac{35\,!}{32\,! \times 3\,!} = \frac{35 \times 34 \times 33}{3 \times 2}$$

3) **Réponse a) :** « ANAGRAMME » contient 9 lettres dont trois « A » et deux « M » indiscernables : nombre de permutations des 9 lettres divisé par les permutations des trois « A » et des deux « M » :
$$\frac{9\,!}{3\,! \times 2\,!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2} = 30\,240$$

4) **Réponse c) :** il s'agit du nombre de 15-listes d'un ensemble de deux éléments : 2^{15}.

5) **Réponse d) :** On peut avoir 0, 1 ou 2 fois « pile », que l'on appelle succès, sur les n lancers que l'on suppose indépendants. On peut placer que d'une façon aucun succès, n façon 1 succès et $\binom{n}{2}$ façons 2 succès. Comme la probabilité de succès est $\frac{1}{2}$, on a :
$$\left(\frac{1}{2}\right)^n + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(1 + n + \frac{n(n-1)}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

EXERCICE 2

Groupe d'étudiants en sciences **(2 points)**

On obtient le tableau double entrée suivant : il y a 36 étudiants dans le groupe.

	Anglais	Allemand	Total
Informatique	3	6	9
Chimie	9	6	15
Astronomie	8	4	12
Total	20	16	36

EXERCICE 3

Boulangeries **(3 points)**

1) Il s'agit pour chaque boulangerie d'attribuer un jour de fermeture parmi les 7 possibles. Il y a un ordre et il peut y avoir répétition. Il s'agit du nombre de 4-listes
Il y a $7^4 = 2\,401$ façons d'attribuer un jour de fermeture.

2) Les boulangeries ne peuvent fermer le même jour. Il n'y a plus de répétition. Il s'agit du nombre de 4-listes d'éléments distincts.

   Il y a $\dfrac{7\,!}{(7-4)\,!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ façons d'attribuer un jour de fermeture.

3) Par le complémentaire : toutes les boulangeries ferment le même jour soit 7 choix.

   Il y a $7^4 - 7 = 2\,394$ façons d'attribuer un jour de fermeture.

Exercice 4

Comité de joueurs **(5 points)**

Comme dans le comités, il n'y pas de fonctions particulières, l'ordre importe peu pour constituer le comité. Il n'y a ni ordre, ni répétition. Il s'agit de combinaisons.

1) Il y a $\dbinom{8}{3} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$ comités possibles.

2) Il y a $\dbinom{6}{2} \times \dbinom{2}{1} = \dfrac{6 \times 5}{2} \times 2 = 30$ comités contenant 2 garçons et 1 fille.

3) Il y a soit deux soit trois garçons d'où :

   $\dbinom{6}{2} \times \dbinom{2}{1} + \dbinom{6}{3} = 30 + \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 50$ comités contenant au moins deux garçons.

4) Si Fred et Émile sont dans le comité, il reste à prendre une personne sur les 6 restantes. Il y a donc 6 comités contenant Fred et Émile.

5) Par le complémentaire : Fred et Émile sont ensemble.

   Il y a $56 - 6 = 50$ comités où Fred et Émile ne sont pas ensemble.

Exercice 5

Jeu de cartes **(5 points)**

On tire 5 cartes simultanément, il n'y a ni ordre, ni répétition. Il s'agit de combinaisons.

1) Il y a : $\dbinom{32}{5} = 201\,376$ tirages possibles.

2) Soit on prend 5 carreaux soit on prend 4 piques et une autre carte qui n'est pas pique,

   soit $\dbinom{8}{5} + \dbinom{8}{4} \times (32-8) = 56 + 70 \times 24 = 1\,736$ tirages.

3) On prend 2 carreaux, 1 pique et 2 autres cartes qui ne sont ni carreaux, ni piques,

   soit $\dbinom{8}{2} \times \dbinom{8}{1} \times \dbinom{32-16}{2} = \dbinom{8}{2} \times \dbinom{8}{1} \times \dbinom{16}{2} = 28 \times 8 \times 120 = 26\,880$ tirages

4) Par le complémentaire : tirages ne contenant aucun roi, soit 5 cartes parmi 28,

   soit $\dbinom{32}{5} - \dbinom{28}{5} = 201\,376 - 98\,280 = 103\,096$ tirages.

5) Soit on prend 2 rois parmi les trois rois non pique et 3 piques non roi, soit on prend le roi de pique, un autre roi, 2 piques non roi et une autre carte ni roi ni pique.

   Les cartes non roi et non pique : $32-4-7=21$,

   soit $\dbinom{3}{2} \times \dbinom{7}{3} + \dbinom{1}{1} \times \dbinom{3}{1} \times \dbinom{7}{2} \times \dbinom{21}{1} = 105 + 1\,323 = 1\,428$ tirages.