Contrôle de mathématiques

Mercredi 25 septembre 2024

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

Pour chacune des cinq questions suivantes une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - n + 1$, alors :

a) $u_{n+1} = 2n^2 + 3n + 2$. **c)** $u_{n+1} = 2n^2 + 3n + 4$.
b) $u_{n+1} = 2n^2 - n + 2$. **d)** $u_{n+1} = 2n^2 - n + 4$.

2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} \times u_n$, alors :

a) $u_2 = \dfrac{3}{8}$ **b)** $u_3 = \dfrac{1}{4}$ **c)** $u_3 = \dfrac{1}{2}$ **d)** $u_4 = \dfrac{1}{4}$

3) Soit (u_n) une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ tel que $u_3 = 95$ et $u_{14} = 392$.
Quelle est la valeur de u_0 ?

a) $u_0 = 25$ **b)** $u_0 = 27$ **c)** $u_0 = 41$ **d)** $u_0 = 14$

4) La somme $3 + 9 + 15 + 21 + \cdots + 663$ vaut :

a) 36 963 **b)** 36 630 **c)** 37 295 **d)** 36 297

5) Quelle valeur renvoie le script pour u(4) ?

a) 6 **b)** 7 **c)** 10 **d)** 11

```python
def u(n):
    u=1
    for i in range(n) :
        u=u+i
    return u
```

EXERCICE 2

Suite géométrique **(4 points)**

Soit la suite géométrique (u_n) telle que $u_2 = 1$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$

1) Calculer u_0
2) Déterminer u_n en fonction de n puis justifier que la suite (u_n) est convergente.
3) Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n.
4) Donner la valeur de S_6 sous la forme d'une fraction irréductible.
5) Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$? Justifier

EXERCICE 3

Taux de chlore **(6 points)**

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1 m^3 = 1 000 ℓ.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore. Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en mg·ℓ^{-1}, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg·ℓ^{-1}.
Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.
Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 mg·ℓ^{-1}. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de 0,70 mg·ℓ^{-1}.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1) Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 mg·ℓ^{-1}.
2) Pour tout entier naturel n, on note u_n le taux de chlore, en mg·ℓ^{-1}, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $u_0 = 0,7$.
   On admet que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,92u_n + 0,3$.
   a) Calculer u_1 et u_2 avec la précision de l'appareil.
   On pose $v_n = u_n - 3,75$
   b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   d) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3) À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.
4) Reproduire et compléter l'algorithme ci-après écrit en langage Python pour que la fonction alerte_chlore renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $u_n > s$.
5) Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction alerte_chlore(3) ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```python
def alerte_chlore(s):
    n=0
    u=0.7
    while ....... :
        n=...
        u=...
    return n
```

EXERCICE 4

Suite homographique **(5 points)**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$

1) Calculer u_1 et u_2.

Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

2) Calculer v_0.
3) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$
4) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
5) Montrer que $u_n = \dfrac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$ puis en déduire la limite de la suite (u_n).