Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 25 septembre 2024

Exercice 1

QCM **(5 points)**

1) **a)** : $u_{n+1} = 2(n+1)^2 - (n+1) + 1 = 2n^2 + 4n + 2 - n - 1 + 1 = n^2 + 3n + 2$

2) **d)** : $u_2 = \dfrac{1+1}{2\times 1} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $\quad u_3 = \dfrac{2+1}{2\times 2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$, $\quad u_4 = \dfrac{3+1}{2\times 3} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4}$

3) **d)** : $r = \dfrac{u_{14} - u_3}{14 - 3} = \dfrac{392 - 95}{11} = 27$, $\quad u_0 = u_3 - 3r = 95 - 3\times 27 = 14$

4) **a)** : Somme S des termes d'une suite arithmétique de raison 6.

Nbre de termes $= \dfrac{663 - 3}{6} + 1 = 111$, $\quad S = 111 \times \left(\dfrac{3+663}{2}\right) = 36\,963$

5) **b)** : pour $u(4)$, i prend les valeurs de 0 à 3 :

i	0	1	2	3
u	1	2	4	7

Exercice 2

Suite géométrique **(4 points)**

1) $u_0 = \dfrac{u_2}{q^2} = \dfrac{1}{1/4} = 4$

2) $u_n = u_2\, q^{n-2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$.

La suite (u_n) converge vers 0.

3) S est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique.

$$S = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 4 \times \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = 8\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

4) $S_6 = 8\left(1 - \dfrac{1}{2^7}\right) = 8\left(1 - \dfrac{1}{128}\right) = \dfrac{8\times 127}{128} = \dfrac{127}{16}$

5) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$. Par somme et produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 8$.

Exercice 3

Taux de chlore **(6 points)**

1) On convertit les g en mg et les m^3 en ℓ.

L'augmentation du taux est alors : $\dfrac{15\times 10^3}{50\times 10^3} = \dfrac{15}{50} = 0,3\ \text{mg}\cdot\ell^{-1}$

2) a) $u_1 = 0,92 \times 0,7 + 0,3 \approx 0,94$ et $u_2 = 0,92 \times 0,58 + 0,3 \approx 1.17$.

b) $v_{n+1} = u_{n+1} - 3,75 = 0,92u_n + 0,3 - 3,75 = 0,92u_n - 3,45 = 0,92\left(u_n - \dfrac{3,45}{0,92}\right)$

$= 0,92(u_n - 3,75) = 0,92v_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,92$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3,75 = -3,05$.

c) $v_n = v_0\, q^n = -3,05 \times 0,92^n$, on a alors $u_n = v_n + 3,75 = 3,75 - 3,05 \times 0,92^n$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,92^n = 0$ car $-1 < 0,92 < 1$, par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3,75$

3) Comme le taux de chlore doit être compris entre 1 et 3 mg·ℓ^{-1}, après un certain temps le taux dépassera 3 mg·ℓ^{-1} pour tendre vers 3,75 mg·ℓ^{-1}. Le taux de chlore à long terme ne sera donc pas conforme.

4) Voir l'algorithme suivant :

```
def alerte_chlore(s):
    n=0
    u=0.7
    while u<=s :
        n=n+1
        u=0.92*u+0.3
    return n
```

5) On trouve $n = 17$. Après 17 jours, le taux ne chlore ne sera plus conforme car il dépassera 3 mg·ℓ^{-1}.

Exercice 4

Suite homographique **(5 points)**

1) $u_1 = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$, et $u_2 = \dfrac{6}{16/3} = \dfrac{18}{16} = \dfrac{9}{8}$.

2) $v_0 = \dfrac{1}{4}$.

3) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \dfrac{\dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} - 1}{\dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2} \overset{\times(u_n+4)}{=} \dfrac{3u_n+2-u_n-4}{3u_n+2+2u_n+8} = \dfrac{2u_n-2}{5u_n+10} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} = \dfrac{2}{5}v_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2}{5}$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$.

4) $v_n = v_0\, q^n = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

5) $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n v_n - u_n = -2v_n - 1 \Leftrightarrow$

$u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{-2v_n - 1}{v_n - 1} \overset{\times(-1)}{=} \dfrac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{2}{5} < 1$, par produit, somme et quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Remarque : l'expression de u_n en fonction de n est $u_n = \dfrac{1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$