Contrôle de mathématiques

Lundi 14 octobre 2024

Exercice 1

Récurrence **(3 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1\,600 \\ u_{n+1} = 0,8u_n + 120 \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = 1\,000 \times 0,8^n + 600$.
2) La suite (u_n) converge-t-elle ? Justifier.

Exercice 2

QCM **(3 points)**

Pour chaque question, une seule des 4 réponses proposées est exacte. Indiquer le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{(2n-3)^2}{3n^2+1}$.

   a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{2}{3}$. **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$. **d)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{4}{3}$.

2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2^{n+1}-3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

   a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$. **d)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On pose $v_n = -\dfrac{2}{u_n}$

   a) Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
   b) Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
   c) Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
   d) Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge.

Exercice 3

Convergence **(6 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$

1) Calculer u_1 et u_2
2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant 2n$
   b) En déduire la limite de la suite (u_n).
3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on a $u_n > 10^p$.
   b) Dans cette question $p = 6$. Écrire un algorithme permettant de calculer N puis donner la valeur affichée.

EXERCICE 4

Convergence **(5 points)**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2) En déduire que la suite (u_n) converge.
3) Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4) On considère le script Python ci-contre :
   a) Donner la valeur renvoyée par `seuil` (2).
   b) La valeur renvoyée par `seuil` (4) est 9.
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
from math import*
def seuil(p):
    u=5
    n=0
    L=(1+sqrt(5))/2
    while abs(u-L)>=10**(-p) :
        u=sqrt(u+1)
        n=n+1
    return n
```

EXERCICE 5

Vrai-Faux **(3 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point :

1) Soit la suite (u_n) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \dfrac{-9^n - 3^n}{7^n}$

   Affirmation 1 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

2) Soit trois suites (u_n), (v_n), (w_n) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$
   a) La suite (v_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.

   Affirmation 2 : La suite (u_n) converge vers ℓ telle que $\ell \in [-1\,;\,1]$

   b) La suite (v_n) est croissante et la suite (w_n) est décroissante.

   Affirmation 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_0 \leqslant u_n \leqslant w_0$