Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 14 octobre 2024

EXERCICE 1

Récurrence **(3 points)**

1) **Initialisation :** $n=0$, $1\,000\times 0,8^0+600=1\,600=u_0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n = 1\,000\times 0,8^n+600$ (HR), montrons que $u_{n+1}=1\,000\times 0,8^{n+1}+600$:

$u_{n+1} = 0,8u_n+120 \overset{\text{HR}}{=} 0,8(1\,000\times 0,8^n+600)+120 = 1\,000\times 0,8^{n+1}+480+120$
$= 1\,000\times 0,8^{n+1}+600$. La proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1\,000\times 0,8^n+600$.

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ car $-1<0,8<1$, par produit et somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 600$

La suite (u_n) converge vers 600.

EXERCICE 2

QCM **(3 points)**

1) **d)** : $u_n = \dfrac{(2n-3)^2}{3n^2+1} = \dfrac{4n^2-12n+9}{3n^2+1} \overset{\div n^2}{=} \dfrac{4-\dfrac{12}{n}+\dfrac{9}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{par quotient}} \dfrac{4}{3}$

2) **b)** : $u_n = \dfrac{2^{n+1}-3^{n+1}}{2^n+3^n} \overset{\div 3^n}{=} \dfrac{2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-3\times 1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1} \quad \dfrac{\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{par somme}} -3}{\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{par somme}} 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{par quotient}} -3$ car $-1<\dfrac{2}{3}<1$

3) **b)** : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geqslant 2 \overset{\uparrow(-1)}{\Rightarrow} \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2} \overset{\times(-2)}{\Rightarrow} -\dfrac{2}{u_n} \geqslant -1 \Rightarrow v_n \geqslant -1$.

a) faux car si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, c) faux car (u_n) et (v_n) ont même variation et d) faux car si $u_n=(-1)^n$, (u_n) et (v_n) n'ont pas de limite donc divergent.

EXERCICE 3

Convergence **(6 points)**

1) $u_1 = 5u_0-8\times 0+6=6$ et $u_2=5u_1-8\times 1+6=28$.

2) a) **Initialisation :** $n=0$, $u_0=0\geqslant 2\times 0$, la proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $u_n \geqslant 2n$ (HR), montrons que $u_{n+1}\geqslant 2(n+1)$

(HR) : $u_n \geqslant 2n \overset{\times 5}{\Rightarrow} 5u_n \geqslant 10n \overset{-8n+6}{\Rightarrow} 5u_n-8n+6 \geqslant 10n-8n+6 \Rightarrow$
$u_{n+1} \geqslant 2n+6 \geqslant 2(n+1)$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$, d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) a) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, tout intervalle $]10^p\,;+\infty[$ contient tout les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N donc $\forall n \geqslant N,\ \ u_n > 10^p$

b) On a par exemple l'algorithme suivant :

```
u=0
n=0
while u<=10**6
    u=5*u-8*n+6
    n=n+1
print(n)
```

On trouve alors $N = 9$
à partir de u_9 les termes de la suite sont supérieurs à 10^6

Exercice 4

Convergence **(5 points)**

1) **Initialisation :** $n = 0,\ u_0 = 5$ et $u_1 = \sqrt{6}$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, montrons que $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

(HR) $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \overset{+1}{\Rightarrow} 2 \leqslant u_{n+1} + 1 \leqslant u_n + 1 \overset{\sqrt{\ }\nearrow}{\Rightarrow} \sqrt{2} \leqslant \sqrt{u_{n+1}+1} \leqslant \sqrt{u_n+1} \Rightarrow$
$1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$

2) La suite (u_n) est décroissante car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$ et minorée par 1, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge vers $\ell \geqslant 1$.

3) La fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur $[1\,;+\infty[$, d'après le théorème du point fixe ℓ est solution de l'équation $\sqrt{x+1} = x$.

$\sqrt{x+1} = x \overset{\uparrow 2}{\Leftrightarrow} x+1 = x^2 \Leftrightarrow x^2-x-1 = 0 \overset{\Delta=5}{\Leftrightarrow} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant 1$ ou $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$

La suite (u_n) converge donc vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4) a) La valeur renvoyée par `seuil` (2) est 5.

b) Les termes de la suite (u_n) se trouve à moins de 10^{-4} de ℓ à partir de $n = 9$.

Exercice 5

Vrai-Faux **(3 points)**

1) **Vraie** $v_n = \dfrac{-9^n - 3^n}{7^n} \overset{\div 9^n}{=} \dfrac{-1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{7}{9}\right)^n}$ or $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} -1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = -1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{9}\right)^n = 0^+ \end{cases}$ car $-1 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{7}{9} < 1$

$\overset{\text{par quotient}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2) a) **Fausse** Contre exemple $v_n = -1 - \dfrac{1}{n}$, $u_n = (-1)^n$ et $w_n = 1 + \dfrac{1}{n}$
(v_n) et (w_n) convergent respectivement vers -1 et 1 et de plus $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.
Pourtant la suite (u_n) diverge (pas de limite).

b) **Vraie** (v_n) est croissante et (w_n) décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_0 \leqslant v_n$ et $w_n \leqslant w_0$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_0 \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \leqslant w_0$.