Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 27 novembre 2024

EXERCICE 1

Vrai-Faux **(5 points)**

1) **Proposition 1 : Vraie** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$ car $\mathrm{e}^x > 0$.
La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
Proposition 2 : Fausse Supposons que f admet deux solutions distinctes $x_1 < x_2$.
Comme f est croissante $f(x_1) < f(x_2)$ or $f(x_1) = f(x_2) = 0$ contradiction.

2) **Proposition 3 : Vraie** On pose $f(x) = \dfrac{x - x^2 + 2}{3x^2} = \dfrac{x^2\left(\dfrac{1}{x} - 1 + \dfrac{2}{x^2}\right)}{3x^2} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x} - 1 + \dfrac{2}{x^2}\right)$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} - 1 + \dfrac{2}{x^2} = -1$ par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\dfrac{1}{3}$.

3) **Proposition 4 : Fausse** Une équation de la tangente en 3 : $y = f'(3)(x-3) + f(3) \Leftrightarrow$
$y = 5(x-3) + 1 \Leftrightarrow y = 5x - 15 + 1 \Leftrightarrow y = 5x - 14$.

4) **Proposition 5 : Vraie** on dérive deux fois.
$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$ et $f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\,\mathrm{e}{-x} = (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$.
$f''(x)$ s'annule en $x = 2$ et change de signe car signe de $f''(x) =$ signe de $(x-2)$.

EXERCICE 2

Représentation graphique **(3 points)**

1) On a $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.
2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Pas d'autre solution car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
3) f est concave sur $]-\infty\,;\,0[$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$.
4) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion en $x = 0$ car la tangente (T) traverse la courbe en $x = 0$.

EXERCICE 3

Limites **(3 points)**

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} 3 - 5\mathrm{e}^x = 3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + 2\mathrm{e}^x = 1$. Par quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3 - 5\mathrm{e}^x}{1 + 2\mathrm{e}^x} = 3$.

2) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ par composition $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$.
$\lim\limits_{x \to 0^+} (x+1) = 1$ par produit $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.
La fonction f est continue à droite en 0. (non continue à gauche car $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$)

b) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)+f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0.$
La fonction f est dérivable à droite en 0 et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse $x = 0$.

Exercice 4

Fonction **(9 points)**

1) a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \mathrm{e}^x = \mathrm{e} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} x-1 = 0^- \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

b) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x-1 = -\infty \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$.

3) a) $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1) - 1\mathrm{e}^x}{(x-1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-2)}{(x-1)^2}$

b) $\forall x \in]-\infty\,;\,1[,\quad \dfrac{\mathrm{e}^x}{(x-1)^2} > 0$ et $x-2 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

x	$-\infty$	1
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$

4) a) $x^2 - 4x + 5 = 0,\quad \Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ pas de solution.
$\forall x \in]-\infty\,;\,1[,\quad x^2-4x+5 > 0$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $(x-1)^3 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$.
La fonction f est concave sur $]-\infty\,;\,1[$.

b) $(\mathrm{T}_0) :\ y = f'(0)x + f(0) = -2x - 1$

c) f est concave sur $]-\infty\,;\,1[$ donc la tangente (T_0) est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$:
$\forall x \in]-\infty\,;\,1[,\quad f(x) \geqslant -2x-1 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^x}{x-1} \geqslant -2x-1 \overset{\times(x-1<0)}{\Leftrightarrow} \mathrm{e}^x \leqslant (x-1)(-2x-1).$

5) a) Sur $]-\infty\,;\,1[$, la fonction f est continue (car dérivable), strictement décroissante et -2 est compris entre $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α.

b) Par balayage d'un tableau de valeur sur la calculatrice, on trouve :
$f(0.31) \approx -1,976$ et $f(0,32) = -2,025$. On a donc $0,31 < \alpha < 0,32$