BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES en mode examen actif

Coefficient : 16

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*

EXERCICE 1 (5 points)

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.
Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

- la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;
- si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;
- si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet. On note :

- R l'événement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'événement « le joueur tire une épée » ;

1) Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $p(\mathrm{R} \cap \mathrm{E})$.
2) Calculer la probabilité de tirer une épée.
3) Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

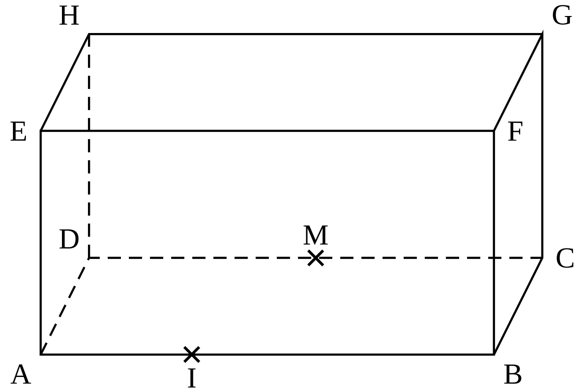
1) Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
2) Déterminer $p(X < 6)$. Arrondir le résultat au millième.
3) Déterminer la plus grande valeur de k telle que $p(X \geqslant k) \geqslant 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4) Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.

   Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à $0,95$.

   Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On utilisera une méthode algébrique pour déterminer ce nombre minimum en expliquant sa démarche.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit le pavé droit ABCDEFGH tel que AB = 3 et AD = AE = 1 représenté ci-dessous.



Soit le point I du segment [AB] tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et le point M milieu du segment [CD].
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

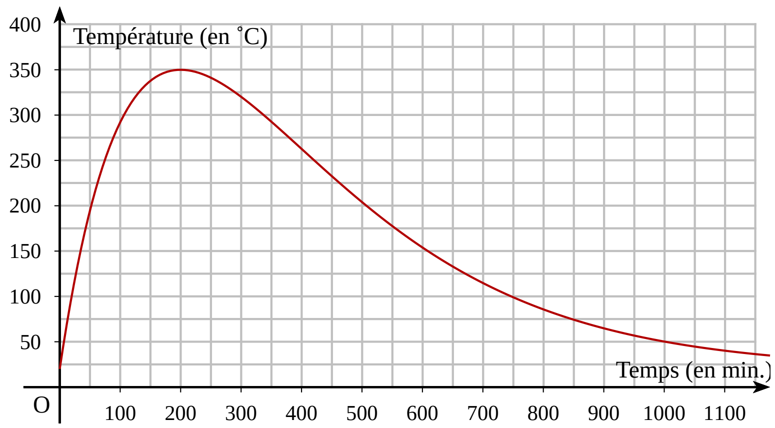
1) Sans justifier, donner les coordonnées des points F , H et M.
2) a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).
   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est : $2x + 6y + 3z - 9 = 0$.
   c) Le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.
3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).
4) On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).
   Déterminer les coordonnées du point N.
5) Le point R de coordonnées $\left(3\,;\,\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 (5 points)

Un organisme certificateur est missionné pour évaluer deux appareils de chauffage, l'un d'une marque A et l'autre d'une marque B.

Partie 1 : appareil de la marque A

À l'aide d'une sonde, on a mesuré la température à l'intérieur du foyer d'un appareil de marque A.
On a représenté, ci-dessous, la courbe de la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer en fonction du temps écoulé, exprimé en minutes, depuis l'allumage du foyer.



Par lecture graphique :

1) Donner le temps en heures, minutes au bout duquel la température maximale est atteinte à l'intérieur du foyer.
2) Donner une valeur approchée, en heures, minutes, de la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse 300 °C.

Partie 2 : étude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(t) = 10\,t\,\mathrm{e}^{-0,01t} + 20$.

1) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2) a) Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad g'(t) = (-0,1t + 10)\,\mathrm{e}^{-0,01t}$.
   b) Étudier les variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ et construire son tableau de variations.
3) Démontrer que l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0\,;\,+\infty[$. En donner des valeurs approchées à l'unité.

Partie 3 : évaluation

Pour un appareil de la marque B, la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer t minutes après l'allumage est modélisée sur $[0\,;\,600]$ par la fonction g.
L'organisme certificateur attribue une étoile par critère validé parmi les trois suivants :

- Critère 1 : la température maximale est supérieure à 320 °C.
- Critère 2 : la température maximale est atteinte en moins de 2 heures.
- Critère 3 : la température à l'intérieur du foyer ne doit pas dépasser 300 °C pendant plus de 5 heures.

Combien chaque appareil A et B obtient-il d'étoiles ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 4 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Soit la suite (t_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_{n+1} = -0,8t_n + 18$.
   Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.
2) Soit la suite (S_n) qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4$.
   Affirmation 2 : La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{S_n}{n}$ converge.
3) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_1 = 2$ et $v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n}$
   Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.
4) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^n - n$.
   Affirmation 4 : La suite (u_n) converge.
5) Soit la suite (u_n) définie à l'aide du script Python suivant, qui renvoie la valeur de u_n.

```
def u(n):
    u=2
    for i in range(n):
        u=0.5*(u+2/u)
    return u
```

   On admet que (u_n) est décroissante et vérifie :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

   Affirmation 5 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.