Contrôle de mathématiques

Lundi 29 septembre 2025

EXERCICE 1

QCM

(5 points)

Pour chacune des cinq questions suivantes une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$, alors :

a) $u_3 = \frac{37}{60}$. b) $u_3 = \frac{47}{60}$. c) $u_3 = \frac{13}{12}$. d) $u_3 = \frac{11}{6}$.

2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3n+1}{n} \times u_n$, alors :

a) $u_2 = \frac{7}{2}$ b) $u_2 = 2$ c) $u_3 = \frac{35}{6}$ d) $u_3 = \frac{35}{12}$

3) Soit (u_n) une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ tel que $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$.
Quelle est la valeur de u_{97} ?

a) $u_{97} = 114$ b) $u_{97} = 194$ c) $u_{97} = 182$ d) $u_{97} = 184$

4) La somme $4 + 8 + 12 + 16 + \dots + 400$ vaut :

a) 20 200 b) 40 400 c) $\frac{1-4^{100}}{1-4}$ d) $4 \times \frac{1-4^{100}}{1-4}$

5) On pose $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}$.

Parmi les scripts Python, celui qui permet de calculer la somme S est :

a)

```
def somme_a():
    s=0
    for k in range(100):
        s=1/(k+1)
    return s
```

c)

```
def somme_c():
    k=0
    while s<100:
        s=s+1/(k+1)
    return s
```

b)

```
def somme_b():
    s=0
    for k in range(100):
        s=s+1/(k+1)
    return s
```

d)

```
def somme_d():
    k=0
    while k<100:
        s=s+1/(k+1)
    return s
```

EXERCICE 2

Monotonie d'une suite

(3 points)

Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$1) u_n = -9 \times 0.6^n + 4 \qquad 2) v_n = \frac{3n + 1}{n + 1}$$

EXERCICE 3

Médicament

(6 points)

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.

On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.

On a $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$.

Avec ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 ml.

- 1) Calculer la valeur u_2 .
- 2) On pose $v_n = u_n - 10$
 - a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n .
- 3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ puis en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
- 4) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, l'inéquation $u_N \geq 10$ admet-elle des solutions ?
Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
- 5) On voudrait savoir à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 ml.

- a) Reproduire et compléter l'algorithme écrit en langage Python pour qu'il affiche le nombre de prises minimum à prendre par le patient.
- b) Quelle valeur affiche-t-il lorsqu'on exécute le programme

```
n=1
u=2
while ..... :
    n = ...
    u = ...
print (n)
```

EXERCICE 4

Suite homographique

(6 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

- 1) Calculer u_1 et u_2 . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
- 2) Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n + 1}{2u_n - 2}$.
 - a) Calculer v_0 .
 - b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$.
 - c) Donner l'expression de v_n en fonction de n .
 - d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
- 3) Montrer que $u_n = 1 + \frac{2}{2v_n - 1}$ puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n .
Quelle est la limite de la suite (u_n) ?