# Contrôle de mathématiques

## Mercredi 26 novembre 2025

## EXERCICE 1

**Vrai-Faux** **(5 points)**

*Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.*
***Chaque réponse doit être justifiée.*** *Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

On rappelle que E désigne la fonction partie entière.

1) **Proposition 1 :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x(5-2x)}{x^2+1} = -2$

   **Proposition 2 :** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2e^x - 1}{3e^x + 4} = \dfrac{2}{3}$

2) **Proposition 3 :** $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{E(x)}{x}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$

3) **Proposition 4 :** $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - E(x)$ est continue en 2.

4) **Proposition 5 :** $f$ définie par $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ admet trois extremums sur $\mathbb{R}$.

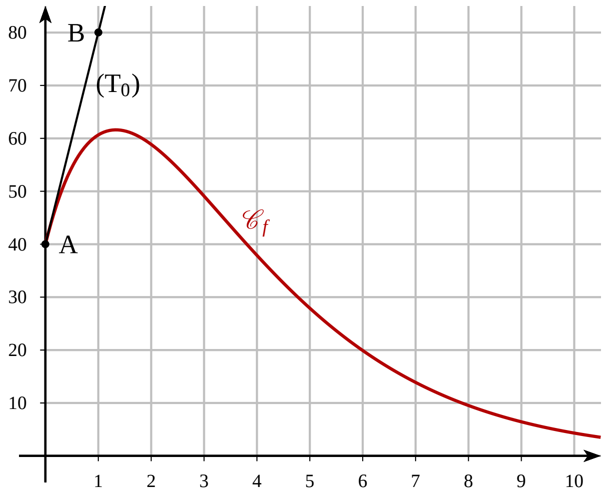
## EXERCICE 2

**Représentation graphique et fonction** **(5 points)**

Soit la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (ax+b)\,e^{-0,5x}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $f'(x) = (-0,5ax + a - 0,5b)\,e^{-0,5x}$.

On a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ de $f$ et la tangente $(T_0)$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.




2) À l'aide du graphique :
   a) Donner les solutions de l'équation $f(x) = 40$.
   b) Donner la limite de $f$ en $+\infty$.
3) a) Sachant que $\mathscr{C}_f$ passe par le point A(0 ; 40), déterminer le coefficient $b$.
   b) Sachant que la tangente $(T_0)$ passe par le point B(1 ; 80) déterminer le coefficient $a$.
4) En déduire les coordonnées exactes du maximum de $f$.

## EXERCICE 3

**Équation irrationnelle** **(4 points)**

Soit la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 3$.

1) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$
2) a) Déterminer $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$
   b) En déduire la monotonie de la fonction $f$ puis dresser le tableau de variation de $f$.
3) a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[0\,;+\infty[$ puis **sans calculatrice** encadrer $\alpha$ entre deux entiers consécutifs.
   b) À l'aide du programme de dichotomie, déterminer un encadrement à $10^{-4}$.
   On donnera le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir ce résultat.

## EXERCICE 4

**Étude d'une fonction** **(6 points)**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 + 3x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$.
On admet que la fonction $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) a) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$ ?
   b) Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.
2) a) Montrer que $f'(x) = (-x^2 - x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de $x$.
   c) Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$. On donnera les valeurs approchées des extremums de $f$ à $10^{-2}$ près.
3) a) Montrer que $f''(x) = (x^2 - x - 2)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   b) En déduire la convexité de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$. On donnera les coordonnées exactes des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.