Contrôle de mathématiques

Mercredi 28 janvier 2026

EXERCICE 1

Probabilités conditionnelles **(5 points)**

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

- 25 % des connexions transitent via le serveur A ;
- 15 % des connexions transitent via le serveur B ;
- le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels).

On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

- 90 % des connexions via le serveur A sont stables ;
- 80 % des connexions via le serveur B sont stables ;
- 85 % des connexions via le serveur C sont stables.

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les événements suivants :

- A : « La connexion s'est effectuée via le serveur A » ;
- B : « La connexion s'est effectuée via le serveur B » ;
- C : « La connexion s'est effectuée via le serveur C » ;
- S : « La connexion est stable ».

1) Traduire la situation par un arbre de probabilité
2) Déterminer la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B.
3) Calculer la probabilité $p\left(\mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{S}}\right)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4) Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $p(\mathrm{S}) = 0,855$.
5) On suppose désormais que la connexion est stable.
   Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B.

EXERCICE 2

Loi binomiale **(7 points)**

Au basket, il est possible de marquer des paniers rapportant trois points.

L'entraîneur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entraînement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de $0,32$.

Lors d'un entraînement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.
On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

1) Montrer que N suit une loi binomiale dont on précisera ses paramètres.
2) Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.
3) Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.
4) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N.
5) On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.
   a) Exprimer T en fonction de N.
   b) En déduire l'espérance de la variable aléatoire T. Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.
   c) Calculer $p(12 \leqslant T \leqslant 18)$.

EXERCICE 3

Transmission **(8 points)**

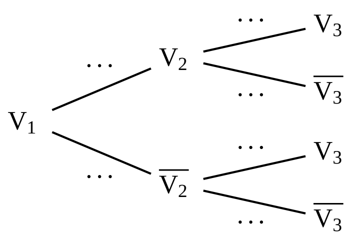
Une donnée binaire est une donnée qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.
Une donnée de ce type est transmise successivement d'une machine à une autre.
Chaque machine transmet la donnée reçue soit de manière fidèle, transmettant l'information telle qu'elle l'a reçue (1 devient 1 et 0 devient 0), soit de façon contraire (1 devient 0 et 0 et devient 1).
La transmission est fidèle dans 90 % des cas, et donc contraire dans 10 % des cas.
Dans tout l'exercice, la première machine reçoit toujours la valeur 1.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

- V_n l'évènement : « la n-ième machine détient la valeur 1 » ;
- $\overline{\mathrm{V}_n}$ l'évènement : « la n-ième machine détient la valeur 0 ».

1) a) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



   b) Démontrer que $p(\mathrm{V}_3) = 0,82$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   c) Sachant que la troisième machine a reçu la valeur 1, calculer la probabilité que la deuxième machine ait aussi reçu la valeur 1.

2) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $p_n = p(\mathrm{V}_n)$.
   La première machine a reçu la valeur 1, on a donc $p_1 = 1$.
   a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1$.
   b) Démontrer par récurrence que : $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$.
   c) Calculer la limite de p_n puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour modéliser en langage Python la transmission de la donnée binaire décrite en début d'exercice, on considère la fonction simul(n) qui prend en paramètre un entier naturel n qui représente le nombre de transmissions réalisées d'une machine à une autre, et qui renvoie la liste des valeurs successives de la donnée binaire.
On donne ci-dessous le script de cette fonction.
On rappelle que l'instruction rand() renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0\,;\,1[$.

```
1 def simul(n):
2     d=1
3     L=[d]
4     for i in range(n):
5         if rand()<0.1
6             d=1-d
7         L.append(d)
9     return L
```

Par exemple, simul(3) peut renvoyer [1, 0, 0, 1].Cette liste traduit :

- qu'une donnée binaire a été successivement transmise trois fois entre quatre machines ;
- la première machine qui détient la valeur 1 a transmis de façon contraire cette donnée à la deuxième machine ;
- la deuxième machine a transmis la donnée qu'elle détient de façon fidèle à la troisième ;
- la troisième machine a transmis de façon contraire la donnée qu'elle détient à la quatrième.

1) Déterminer le rôle des instructions des lignes 5 et 6 de l'algorithme ci-dessus.
2) Calculer la probabilité que simulation(4) renvoie la liste [1, 1, 1, 1, 1] et la probabilité que simulation(6) renvoie la liste [1, 0, 1, 0, 0, 1, 1].