

BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES en mode examen actif

Coefficient : 16

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*

EXERCICE 1**(5 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points suivants : $A(1; 3; 0)$, $B(-1; 4; 5)$, $C(0; 1; 0)$ et $D(-2; 2; 1)$.

- 1) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.
- 2) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
- 3) Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 1)$.
 - a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
 - b) Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne : $2x - y + z + 1 = 0$
 - c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

- 4) On appelle H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

- 5) Le volume V d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \times B \times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.

- a) Montrer que $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

- b) En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

- 6) On considère la droite d de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -3k \\ z = 1 + k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

EXERCICE 2**(5 points)**

On dispose d'un sac et de deux urnes A et B.

- Le sac contient 4 boules : 1 boule avec la lettre A et 3 boules avec la lettre B.
- L'urne A contient 5 billets : 3 billets de 50 euros et 2 billets de 10 euros.
- L'urne B contient 4 billets : 1 billet de 50 euros et 3 billets de 10 euros.

Un joueur prend au hasard une boule dans le sac :

- si c'est une boule avec la lettre A, il prend au hasard un billet dans l'urne A.
- si c'est une boule avec la lettre B, il prend au hasard un billet dans l'urne B.

On note les évènements suivants :

- A : « le joueur obtient une boule avec la lettre A. »
- C : le joueur obtient un billet de 50 euros.

- 1) Traduire cette situation par un arbre de probabilité.
- 2) Quelle est la probabilité de l'évènement « le joueur obtient une boule avec la lettre A et un billet de 50 euros » ?
- 3) Démontrer que la probabilité $p(C)$ est égale à 0,3375.
- 4) Le joueur a obtenu un billet de 10 euros.
L'affirmation « Il y a plus de 80 % de chances qu'il ait au préalable obtenu une boule avec la lettre B » est-elle vraie ? Justifier.
- 5) On note S la variable aléatoire qui donne la somme, en euros, obtenue par le joueur.
Exemple : si le joueur obtient un billet de 50 euros, on a $S = 50$.
Montrer que l'espérance $E(S)$ est égale à 23,50 et que la variance $V(S)$ est égale à 357,75.

- 6) Dans cette question, on arrondit la probabilité d'obtenir un billet de 50 euros à 0,34.

On appelle partie, le tirage d'une boule et d'un billet. Un joueur effectue 20 parties, en remettant après chaque partie la boule dans le sac et le billet de l'urne. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de billets de 50 euros obtenus sur les 20 parties.

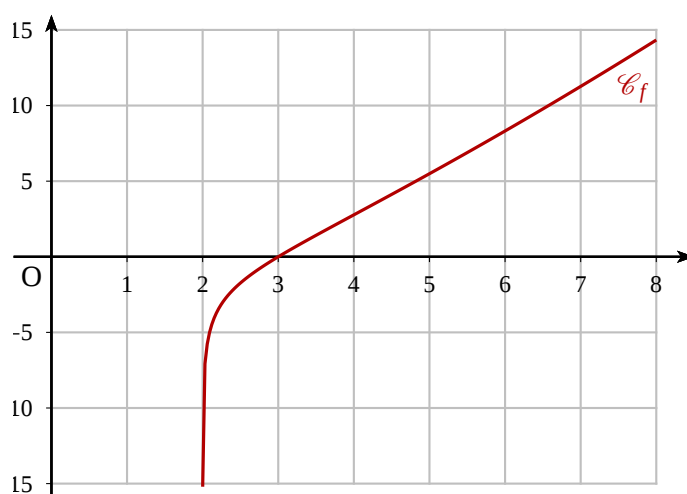
- Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- Quelle la probabilité que le joueur obtienne 7 billets de 50 euros ?
- Quelle la probabilité que le joueur obtienne au moins 13 billets de 10 euros ?

EXERCICE 3

(5 points)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x - 2)$.

On donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ci-dessous.



- Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f , ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.
- Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2; +\infty[$.
- Calculer la limite de f quand x tend vers 2.
Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1) ?
- Déterminer la fonction dérivée $f'(x)$ sur $]2; +\infty[$.
- On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.
 - Démontrer que pour tout $x \in]2; +\infty[$, on a : $g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}$.
 - On admet que $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2; +\infty[$.
On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g .
 - En déduire que, pour tout $x \in]2; +\infty[$: $g(x) > 0$.
 - En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2; +\infty[$.
- Étudier la convexité de la fonction f sur $]2; +\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .
- Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ? On se justifiera.

EXERCICE 4**(5 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1) Soit un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(-3; 1; 4)$, $B(1; 5; 2)$, $C(0; 1; -1)$,

et la représentation paramétrique de la droite d :
$$\begin{cases} x = -6 + 3t \\ y = 1 \\ z = 9 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 1 : Les droites (AB) et d sont sécantes non perpendiculaires

Affirmation 2 : L'angle $\widehat{BAC}$ est égal à 39° au degré près.

- 2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{n}{2 + \cos n}$.

Affirmation 3 : La suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

- 3) Soit la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = 5$ et $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

Affirmation 4 : Pour tout $n \geq 1$, $a_n \geq 3n - 1$.

- 4) Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x^2$.

Affirmation 5 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.