BACCALAURÉAT GENERAL

DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES en mode examen actif

Coefficient : 16

CORRECTION

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

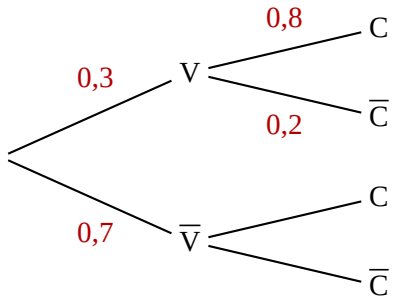
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1) $P(\text{C}) = 0,75$.

2) On obtient l'arbre suivant :



3) $P(\text{V} \cap \text{C}) = P(\text{A}) \times P_{\text{V}}(\text{C}) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$

4) $P_{\text{C}}(\text{V}) = \dfrac{P(\text{V} \cap \text{C})}{P(\text{C})} = \dfrac{0,24}{0,75} = 0,32$

5) Des probabilités totales : $P(\text{C}) = P(\text{V} \cap \text{C}) + P(\overline{\text{V}} \cap \text{C}) \Leftrightarrow P(\text{C}) = P(\text{V} \cap \text{C}) + P(\overline{\text{V}}) \times P_{\overline{\text{V}}}(\text{C})$

d'où $P_{\overline{\text{V}}}(\text{C}) = \dfrac{P(\text{C}) - P(\text{V} \cap \text{C})}{P(\overline{\text{V}})} = \dfrac{0,75 - 0,24}{0,7} \approx 0,73$ à 10^{-2} près.

La probabilité qu'une famille n'ayant pas réservé une place pour un véhicule réserve une cabine est de 73 %.

Partie B

1) $\text{E}(X) = \sum p_i x_i = 0,06 \times 70 + 0,51 \times 100 + 0,24 \times 170 = 96$

$\text{V}(X) = \sum p_i x_i^2 - \text{E}^2(X) = 0,06 \times 70^2 + 0,51 \times 100^2 + 0,24 \times 170^2 - 96^2 = 3\,114$

2) a) Comme il y 40 % de rabais sur les suppléments et les extras, les familles ne payent que 60 % du prix donc : $Z = 0,6(X + Y)$.

b) Comme l'espérance est une opération linéaire :

$$\text{E}(Z) = 0,6(\text{E}(X) + \text{E}(Y)) = 0,6(96 + 104) = 120$$

Comme les variables X et Y sont indépendantes :

$$\text{V}(Z) = 0,6^2(\text{V}(X) + \text{V}(Y)) = 0,36(3\,114 + 1\,686) = 1\,728$$

3) a) Comme l'espérance est une opération linéaire : $\text{E}(M_n) = \dfrac{n \times \text{E}(Z)}{n} = \text{E}(Z) = 120$

Comme les variables de l'échantillon sont indépendantes :

$$\text{V}(M_n) = \frac{1}{n^2} \times [n \times \text{V}(Z)] = \frac{\text{V}(Z)}{n} = \frac{1\,728}{n}$$

b) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour un intervalle de rayon δ s'écrit

$$P(|M_n - 120| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\text{V}(M_n)}{\delta^2} \Leftrightarrow P(|M_n - 120| < \delta) > 1 - \frac{\text{V}(M_n)}{\delta^2}$$

Donc pour $\delta = 6$, on a $P(114 < M_n < 126) > \dfrac{1\,728}{36n} = 1 - \dfrac{48}{n}$

On veut donc que $1 - \dfrac{48}{n} \geqslant 0,85 \Leftrightarrow \dfrac{48}{n} \leqslant 0,15 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{48}{0,15} = 320$

La moyenne du prix total payé par une famille sur un échantillon d'au moins 320 familles, a une probabilité d'au moins 85 % d'être compris entre 114 € et 126 €.

EXERCICE 2 — (4 points)

1) a) **Affirmation 1 : Vraie** :

Un vecteur normal au plan (P) est : $\vec{n}(-1\,;\,1\,;\,-5)$ et $\overrightarrow{\text{AB}}(-1\,;\,1\,;\,-5)$ donc $\overrightarrow{\text{AB}} = \vec{n}$.
Un vecteur directeur de (AB) est un vecteur normal à (P) donc (P) est orthogonal à (AB).

De plus le milieu I de [AB] a comme coordonnées : $\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,-\frac{5}{2}\right)$

$-x_\text{I} + y_\text{I} - 5z_\text{I} - 0,5 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} - 0,5 = 0$. Donc le plan (P) passe par le milieu de [AB].

b) **Affirmation 2 : Fausse** :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x = 3 - s \\ y = s \\ z = 2 - 5s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$

En égalisant les deux systèmes : $\begin{cases} 3 - s = t & (1) \\ s = -1,5 - t & (2) \\ 2 - 5s = 2 - 2t & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \ 3 - s = t \\ (1) + (2)\ \ 3 = -1,5 \ \text{ impossible} \\ (3)\ \ 2 - 5s = 2 - 2t \end{cases}$

La droite (d) et le plan (P) ne sont pas sécants.

c) **Affirmation 3 : Vraie** : $\overrightarrow{\text{CA}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}} = \text{CA} \times \text{CB} \cos \widehat{\text{ACB}} \Leftrightarrow \cos \widehat{\text{ACB}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{CA}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}}}{\text{CA} \times \text{CB}}$

$\overrightarrow{\text{CA}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0,75 + 12 - 6 = 6,75$

$\text{CA} = \sqrt{1,5^2 + 3^2 + 3^2} = 4,5$ et $\text{CB} = \sqrt{0,5^2 + 4^2 + (-2)^2} = 4,5$

Donc $\cos \widehat{\text{ACB}} = \dfrac{6,75}{4,5^2} \Rightarrow \widehat{\text{ACB}} = \arccos\left(\dfrac{6,75}{20,25}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx 70,5°$ à 10^{-1} près.

2) **Affirmation 4 : Vraie** :

Le digicode de la porte A : 3 tirages successifs sans remise donc $\dfrac{8\,!}{(8-3)\,!} = 336$ choix

Le digicode de la porte B : 4 tirages simultanés donc $\binom{8}{4} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 70$ choix.

Comme les choix sont équiprobables $P(\text{A}) = \dfrac{1}{336}$ et $P(\text{B}) = \dfrac{1}{70}$.
Titouan a donc plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

EXERCICE 3 — (6 points)

1) $y(t) = k\,\text{e}^{-0,035t} + \dfrac{0,91}{0,035} \Leftrightarrow y(t) = k\,\text{e}^{-0,035t} + 26$, avec $k \in \mathbb{R}$

2) On a donc $T(t) = k\,\text{e}^{-0,035t} + 26$ or $T(0) = 18$ donc $k + 26 = 18 \Leftrightarrow k = -8$
d'où $T(t) = 26 - 8\text{e}^{-0,035t}$

3) $T(t) = 20 \Leftrightarrow 26 - 8\text{e}^{-0,035t} = 20 \Leftrightarrow 8\text{e}^{-0,035t} = 6 \Leftrightarrow \text{e}^{-0,035t} = 0,75 \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow} -0,035t = \ln 0,75$
$\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 0,75}{-0,035} \approx 8,2$. Il faut donc un temps de 82 minutes soit 1 heure et 22 minutes

4) D'après la composition sur les limites : $\lim\limits_{t \to +\infty} \text{e}^{-0,035t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = 26$.
Au maximum après un temps long la température tendra vers 26° C. La température de la pièce ne pourra pas dépasser 28° C.

Partie B : Phase de refroidissement

1) Avec $n = 0$, $u_1 = 0,965 \times 20 + 0,35 + 0,07\,\mathrm{e}^0 = 19,72$.

2) **Initialisation :** $n = 0$, $u_0 = 20 > 10$, la proposition est initialisée.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > 10$ (HR), montrons que $u_{n+1} > 10$.
(HR) $u_n > 10 \overset{\times 0,965}{\Rightarrow} 0,965u_n > 9,65 \overset{+0,35}{\Rightarrow} 0,965u_n + 0,35 > 10 \overset{+0,07\mathrm{e}^{-0,1n}>0}{\Rightarrow}$
$0,965u_n + 0,35 + 0,07\mathrm{e}^{-0,1n} > 10 \Rightarrow u_{n+1} > 10$. La proposition est héréditaire.
Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 10$

3) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 10, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente vers ℓ avec $\ell \geqslant 10$.

a) D'après la composition de limite $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,07\,e^{-0,1n} = 0$
Donc la suite quand $n \to +\infty$ est assimilable à la suite $v_n = 0,965v_n + 0,35$ avec $v_0 = 20$.
La fonction associée $f(x) = 0,965x + 0,35$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ de (v_n) et (u_n) vérifie l'équation $f(x) = x \Leftrightarrow 0,965x + 0.35 = x$

b) $0,965x + 0.35 = x \Leftrightarrow x = \dfrac{0,35}{0,035} = 10$. La suite (u_n) converge vers 10.
Sur un temps long, en l'absence de chauffage, la température tendra vers 10°C.

4) a) On obtient l'algorithme suivant :

```
from math import*
def marche() :
    n=0
    u=20
    while u>18 :
        u=0.965*u+0.35+0.07*exp(-0.1*n)
        n=n+1
    return n
```

b) On trouve $n = 8$, au bout de 80 minutes (1 h 20) le chauffage se remettra en route.

EXERCICE 4 — (5 points)

1) D'après l'énoncé $f(0) = 1 \Leftrightarrow a + \dfrac{b\ln 1}{1} = 1 \Leftrightarrow a = 1$.

2) a) La tangente T_A passe par A et B(1 ; 5) donc $f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-1}{1-0} = 4$.

b) En 1 la fonction f est concave donc $f''(1) < 0$.

3) a) $f(x) = 1 + \dfrac{b\ln(x+1)}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\dfrac{b}{x+1} \times (x+1) - b\ln(x+1) \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{b[1 - \ln(x+1)]}{(x+1)^2}$.

b) $f'(0) = 4 \Leftrightarrow \dfrac{b(1-\ln 1)}{(0+1)^2} = 4 \Leftrightarrow b = 4$.

Partie B

1) On pose $X = x + 1$, donc si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ (limite de référence).
Par somme et produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
La courbe de f admet un asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 1$.

2) $1 - \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) < 1 \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} x+1 < \mathrm{e} \Leftrightarrow x < -1 + \mathrm{e}$.

3) On obtient le tableau de variation suivant :

x	-1		$-1+\mathrm{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$1+\dfrac{4}{\mathrm{e}}$	↘	1

4) $-1+\mathrm{e} \approx 1,718 < 2$. D'après le tableau de variation, sur $[2\,;+\infty[$, la fonction f est décroissante et continue et 1,5 est compris entre $f(2) = 1 + \dfrac{4\ln 3}{3} \approx 2,46$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1,5$ admet un unique solution α.

Par lecture d'un tableau de valeurs, on trouve $\alpha \approx 25,1$ à 10^{-1} près.

5) a) La fonction $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \dfrac{1}{x+1} \times \ln(x+1) = u'(x) \times u(x)$, avec $u(x) = \ln(x+1)$

une primitive est alors $\dfrac{u^2}{2} = \dfrac{\ln^2(x+1)}{2}$.

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln^2(x+1)}{2}\right]_0^2 = \frac{\ln^2 3}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{\ln^2 3}{2}.$$

b) $$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{d}x + 4\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2 + 4 \times \frac{\ln^2 3}{2} = 2 + 2\ln^2 3 \approx 4,41$$

L'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$ vaut $2 + 2\ln^2 3$.