BACCALAURÉAT GENERAL

DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES en mode examen actif

Coefficient : 16

CORRECTION

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

EXERCICE 1 (5 points)

1) $\overrightarrow{AB}(2\,;\,-3\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;\,-2\,;\,0)$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles car $\dfrac{-2}{1} \neq \dfrac{-2}{-3}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc A, B et C forment un plan.

2) a) $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 + 3 - 4 = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 + 2 + 0 = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), il est donc normal à (ABC).

b) Soit M$(x\,;\,y\,;\,z)$ un point du plan (ABC), on a alors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 2 - (y-1) + 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - y + 4z - 5 = 0$$

3) Δ est orthogonale au plan (ABC) donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ.

Comme Δ passe par D$(0\,;\,,0\,;\,2)$, sa représentation paramétrique est alors

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 - t \\ z = 2 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

4) En faisant $t = -\dfrac{1}{6}$, on retrouve les coordonnées de H donc H est sur Δ.

De plus $x_H - y_H + 4z_H - 5 = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{16}{3} - 5 = \dfrac{-1 - 1 + 32 - 30}{6} = 0$

Donc le point H est dans le plan (ABC), comme la droite Δ est orthogonale au plan, H est bien le projeté orthogonal de D sur le plan.

5) a) $AB = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$

$\overrightarrow{BC}(-3\,;\,1\,;\,1)$ donc $BC = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

$AB = BC$ le triangle ABC est isocèle en B.

b) $AC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Comme ABC est isocèle en B, I le pied de la hauteur du triangle ABC issu de B est le milieu de [AC], d'après le théorème de Pythagore :

$$BI^2 = BC^2 - IC^2 = 11 - 2 = 9 \Leftrightarrow BI = 3$$

On alors $\mathscr{A}(ABC) = \dfrac{AC \times BI}{2} = \dfrac{2\sqrt{2} \times 3}{2} = 3\sqrt{2}$

6) a) La hauteur du tétraèdre ABCD est DH.

$$\overrightarrow{DH}\left(-\frac{1}{6}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{4}{3} - 2\right) = \left(-\frac{1}{6}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,-\frac{2}{3}\right)$$

$$DH = \frac{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-4)^2}}{6} = \frac{\sqrt{18}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V_{ABCD} = \frac{\mathscr{A}(ABC \times DH}{3} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

b) Si on prend comme base du tétraèdre BCD, et J le projeté orthogonal de A sur (BCD) on a :

$$V_{ABCD} = \frac{\mathscr{A}(BCD) \times AJ}{3} \Leftrightarrow \mathscr{A}(BCD) = \frac{3V_{ABCD}}{AJ} = \frac{3 \times 1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

7) a) Si A, B, C, D_k coplanaires, il existe α et β tels que :

$$\overrightarrow{AD_k} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ k-1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -2 & (1) \\ -3\alpha - 2\beta = -1 & (2) \\ -\alpha = k-1 & (3) \end{cases}$$

$-2(\times(1) + (2)$ donne $-5\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{3}{5}$ d'où $k - 1 = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow k = \dfrac{8}{5}$

Comme A, B, C, D_k sont coplanaires, D_k se projette en lui-même.

b) Si D_k se projette orthogonalement en A sur (ABC) alors $\overrightarrow{AD_k}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

On doit avoir $\overrightarrow{AD_k} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ k-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 + 2 + 0 = 0$ impossible.

EXERCICE 2 — (5 points)

Partie A : modèle discret

1) Calculer $v_1 = 6$ et $v_2 = 11,97$.

2) On obtient l'algorithme suivant :

```
def volume(n) :
    v=0
    for k in range(n) :
        v=0.995*v+6
    return v
```

3) **Initialisation :** $n = 0$, $v_0 = 0$ et $v_1 = 6$ donc $v_0 \leqslant v_1 \leqslant 1\,200$.
La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 1\,200$, montrons que $v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 1\,200$

$$v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 1\,200 \overset{\times 0,995}{\Rightarrow} 0,995v_n \leqslant 0,995v_{n+1} \leqslant 1\,194 \overset{+6}{\Rightarrow}$$
$$0,995v_n + 6 \leqslant 0,995v_{n+1} + 6 \leqslant 1\,200 \Rightarrow v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 1\,200$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 1\,200$.

4) La suite (v_n) est croissante $v_n \leqslant v_{n+1}$ et majorée par 1 200, d'après le théorème des suites monotones, la suite (v_n) converge vers $\ell \leqslant 1\,200$.

La fonction associée $f(x) = 0,995x + 6$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation $f(x) = x \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{0,005} = 1\,200$. La suite (v_n) converge vers 1 200.

Partie B : modèle continu

1) a) $y(t) = k\,e^{-0,005t} + \dfrac{6}{0,005} \Leftrightarrow y(t) = k\,e^{-0,005t} + 1\,200$ avec $k \in \mathbb{R}$.

b) $v(0) = 0 \Leftrightarrow k + 1\,200 = 0 \Leftrightarrow k = -1\,200$.

On a donc $v(t) = -1\,200\,e^{-0,005t} + 1\,200 = v(t) = 1200(1 - e^{-0,005t})$.

c) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} -0,005t = -\infty \\ \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0 \end{array}\right\}$ Par composition $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,005t} = 0$, par produit et somme $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 1\,200$.

d) $v'(t) = -1\,200(-0,005\,e^{-0,005t}) = 6\,e^{-0,005t} > 0$.

La fonction v est croissante.

2) $30\,000 \times 0,05 = 1\,500 > 1\,200$, donc le taux de la substance est inférieur à 5 %. Il n'est pas nécessaire d'effectuer un nettoyage.

3) $v(t) > 50 \iff 1\,200(1 - \mathrm{e}^{-0,005t}) > 50 \iff 1 - \mathrm{e}^{-0,005t} > \dfrac{50}{1\,200} = \dfrac{1}{24} \iff \mathrm{e}^{-0,005t} < \dfrac{23}{24}$

$\overset{\ln\nearrow}{\iff} -0,005t < \ln\dfrac{23}{24} \iff -\dfrac{t}{200} < \ln\dfrac{23}{24} \iff t > -200\ln\dfrac{23}{24} \approx 8,511$

Soit au bout de 8h31.

EXERCICE 3 — (4 points)

1) **Affirmation 1 : Vraie** D'après l'énoncé $P\mathrm{O}) = 0,52$, $P_{\mathrm{O}}(\mathrm{F}) = 0,32$ et $P(\mathrm{F}) = 0,2$.

$P_{\mathrm{F}}(\mathrm{O}) = \dfrac{P(\mathrm{O} \cap \mathrm{F})}{P(\mathrm{F})} = \dfrac{P(\mathrm{O}) \times P_{\mathrm{O}}(\mathrm{F})}{P(\mathrm{F})} = \dfrac{0,52 \times 0,32}{0,2} = 0,832$

2) **Affirmation 2 : Fausse**

Soit l'expérience « on prélève une personne dans l'échantillon » et on appelle succès « la personne est un musicien professionnel » de probabilité 0,062.

On réitère 5 000 fois cette expérience de façon identique et indépendante (assimilable à un tirage avec remise) et on appelle X la v.a. associée au nombre de succès.

X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(5\,000\,;\,0,062)$. On a alors :

$P(X \leqslant 340) = \text{binomFrép}(5\,000, 0.062, 340) \approx 0,961.$

Affirmation 3 : Vraie $\mathrm{E}(X) = 5\,000 \times 0,062 = 310$ et $\mathrm{V}(X) = 310 \times 0,938 = 290,78$

La largeur de l'intervalle demandé est $\delta = 390 - 310 = 80$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$P(|X - 310| \geqslant 80) \leqslant \dfrac{\mathrm{V}(X)}{\delta^2} \iff P(|X - 310| < 80) > 1 - \dfrac{\mathrm{V}(X)}{\delta^2} = 1 - \dfrac{290,78}{80^2} \approx 0,954$

Il y a plus de 95 % de chance que, sur cet échantillon de 5 000 actifs dans le secteur de la culture, le nombre de musiciens professionnels soit strictement compris entre 230 et 390.

3) **Affirmation 4 : Vraie** : Pour former les équipe, il n'y a ni répétition, ni ordre. Il s'agit donc de combinaisons.

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 6 \times 20 = 120$$

EXERCICE 4 — (6 points)

Partie A

1) $f'(1) = 0$ car la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1 horizontale.

2) $f(x) = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$. (Intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses)

3) $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 0}{\dfrac{1}{2} - 0} = 2\mathrm{e}^2.$

4) Comme f est négative si $x < 0,5$ et positive si $x > 0,5$, la primitive est donc décroissante si $x < 0,5$ et croissante si $x > 0,5$. Seules les courbes C_1 et C_2 respecte cette contrainte.

Partie B

1) a) $f(x) = (2x - 1)\,\mathrm{e}^{-2x+3} = (2x - 1)\,\mathrm{e}^{-2x+1} \times \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2 \times \dfrac{2x - 1}{\mathrm{e}^{2x-1}}$

b) On pose $X = 2x - 1$ donc si $x \to +\infty$ alors $X \to +\infty$. On a alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{\mathrm{e}^{2x-1}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^{X}} = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty \text{ (limite de référence)}$$

Par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) a) $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-2x+3} + (2x-1)(-2\,\mathrm{e}^{-2x+3}) = \mathrm{e}^{-2x+3}(2-4x+2) = \mathrm{e}^{-2x+3}(4-4x) = 4(1-x)\mathrm{e}^{-2x+3}$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et signe $(f(x))$ = signe $(1 - x)$.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\mathrm{e}^3$	↗	e	↘	0

3) Du fait de la symétrie, α est tel que $f(\alpha) = \dfrac{0,3}{2} = 0,15$.

Sur $[1\,;+\infty[$, la fonction f est continue, décroissante et 0,15 est compris entre $f(1) = \mathrm{e} \approx 2,72$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,15$ admet une unique solution α.

Par lecture d'un tableau de valeurs, on a $f(3,3) \approx 0,153$ et $f(3,4) \approx 0,128$.
On a donc $\alpha \approx 3,3$.

Partie C

1) $I = \displaystyle\int_{0,5}^{3,3} (2x-1)\mathrm{e}^{-2x+3}\,\mathrm{d}x$, on pose : $\left|\begin{array}{ll} u(x) = 2x-1 & u'(x) = 2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-2x+3} & v(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+3} \end{array}\right.$

$$I = \left[-\frac{1}{2}(2x-1)\mathrm{e}^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3} + \int_{0,5}^{3,3} \mathrm{e}^{-2x+3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(5,6)\mathrm{e}^{-3,6} + \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+3}\right]_{0,5}^{3,3}$$
$$= -2,8\mathrm{e}^{-3,6} - 0,5\mathrm{e}^{-3,6} + 0,5\mathrm{e}^{2} = -3,3\mathrm{e}^{-3,6} + 0,5\mathrm{e}^{2} \approx 3,6$$

2) En tenant compte de la symétrie :

$$V = 2\int_{0,5}^{3,3} f(x)\,\mathrm{d}x \times 0,2 \approx 2 \times 3,6 \times 0,2 \approx 1,44 \text{ cm}^3$$