Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 23 septembre 2026

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **c)** : $u_{n+1} = 4(n+1)^2 - 5(n+1) + 3 = 4n^2 + 8n + 4 - 5n - 5 + 3 = 4n^2 + 3n + 2$

2) **b)** : $r = \dfrac{u_{49} - u_{21}}{49 - 21} = \dfrac{127 - 57}{28} = \dfrac{70}{28} = \dfrac{5}{2}$.

$u_0 = u_{21} - 21r = 57 - 21 \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{114 - 105}{2} = \dfrac{9}{2} = 4,5.$

3) **c)** : $q^3 = \dfrac{u_6}{u_3} = 3\sqrt{3} = (\sqrt{3})^3 \Leftrightarrow q = \sqrt{3}.$

$u_{11} = u_6\, q^5 = 3\sqrt{3} \times (\sqrt{3})^5 = 3\sqrt{3} \times 9\sqrt{3} = 81.$

4) **a)** : $S = 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \cdots + 2^{10}$ donc S est la somme des 8 premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme 8. On a alors :

$$S = 8 \times \frac{1 - q^8}{1 - q} = 2^3 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 2^3(2^8 - 1) = 2^{11} - 2^3 = 2\,048 - 8 = 2\,040$$

5) **c)** : le programme effectue 5 boucles où k prend les valeurs de 1 à 5.
f prend les valeurs successives 1, 2, 6, 24, 120.

EXERCICE 2

Monotonie d'une suite **(3 points)**

1) $u_{n+1} - u_n = \cancel{40} - 3 \times 0,85^{n+1} - \cancel{40} + 3 \times 0,85^n = 3 \times 0,85^n(-0,85 + 1) = 0,15 \times 3 \times 0,85^n$
$= 0,45 \times 0,85^n \geqslant 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante.

2) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-2n - 1}{n + 4} - \dfrac{-2n + 1}{n + 3} = \dfrac{(-2n - 1)(n + 3) - (-2n + 1)(n + 4)}{(n + 4)(n + 3)}$

$= \dfrac{\cancel{-2n^2} - 6n - n - 3 + \cancel{2n^2} + 8n - n - 4}{(n + 4)(n + 3)} = \dfrac{-7}{(n + 4)(n + 3)} \leqslant 0.$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$, la suite (v_n) est décroissante.

EXERCICE 3

Réserve naturelle **(6 points)**

1) $u_1 = 100 - 100 \times 0,15 + 6 = 91$. En 2022, il y avait 91 tigres.

2) Comme il y a 15 % de perte, on multiplie u_n par 0,85 et une compensation 6 tigres d'où $u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

3) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,85u_n + 6 - 40 = 0,85u_n - 34 = 0,85\left(u_n - \dfrac{34}{0,85}\right)$

$= 0,85(u_n - 40) = 0,85v_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,85$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 40 = 60$.

b) $v_n = v_0\, q^n = 60 \times 0,85^n$ d'où $u_n = v_n + 40 = 60 \times 0,85^n + 40$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,85^n = 0$ car $-1 < 0,85 < 1$, par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 40$.

La population de tigres diminue jusqu'à se stabiliser autour de 40 tigres.

5) On voudrait savoir à partir de partir de quelle année, la population de tigres sera inférieure à 45 individus.

a) Voir ci-contre

b) En 2037.

```
n=2021
u=100
while u>=45 :
    n=n+1
    u=0.85*u+6
print(n)
```

EXERCICE 4

Suite homographique **(6 points)**

1) $u_1 = \dfrac{3 \times \frac{1}{4}}{2 \times \frac{1}{4} - 1} = \dfrac{\frac{3}{4}}{-\frac{2}{4}} = -\dfrac{3}{2}$ et $u_2 = \dfrac{3\left(-\frac{3}{2}\right)}{2\left(-\frac{3}{2}\right) - 1} = \dfrac{-\frac{9}{2}}{-\frac{8}{2}} = \dfrac{9}{8}$

2) a) $v_0 = \dfrac{1}{u_0} - \dfrac{1}{2} = 4 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$.

b) $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2u_n - 1}{3u_n} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4u_n - 2 - 3u_n}{6u_n} = \dfrac{u_n - 2}{6u_n} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{2 - u_n}{2u_n}$

$= -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{3} v_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = -\dfrac{1}{3}$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{3}$.

c) $v_n = v_0\, q^n = \dfrac{7}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$, par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

3) $v_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{u_n} = v_n + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{2v_n + 1}{2} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{2}{2v_n + 1}$.

On a alors : $u_n = \dfrac{2}{7\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1} \overset{\times(-3)^n}{=} \dfrac{2 \times (-3)^n}{7 + (-3)^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 2v_n + 1 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{2v_n + 1} = 2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2.$