Contrôle de mathématiques

Mercredi 14 octobre 2026

Exercice 1

Récurrence **(3 points)**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant 4$.
2) On admet que la suite (u_n) est décroissante. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 2

Vrai-Faux **(5 points)**

Pour chacune des propositions suivantes,indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point

1) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{2n + \sin n}{n+1}$.

   Proposition 1 : La suite (u_n) diverge.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n + 2n + 1$.

   Proposition 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = n^2$

3) Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ et vérifiant : $\dfrac{1}{2} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1}$.

   Proposition 3 : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \dfrac{1}{2}$

Exercice 3

Comparaison de deux modèles **(10 points)**

On souhaite comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux A et B. Au 1er janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.
L'évolution de la population dans ce milieu est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0,93$.
u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, en milliers d'individus.

1) Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.
3) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.
L'évolution de la population dans ce milieu est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} : \ v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n.$$

v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, en milliers d'individus.

1) Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$.

2) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;11]$.

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

4) En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.

5) a) On admet que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.
En déduire la valeur de ℓ.

b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.

2) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.

3) Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.

4) On considère le programme Python ci-contre.

a) Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.

b) Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
n=0
u=6
v=6
while ... :
    u = ...
    v = ...
    n=n+1
print(2025+n)
```

EXERCICE 4

Série **(2 points)**

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \dfrac{3}{n^2+3} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Programmer cette suite par une fonction Python, $u(n)$, puis recopier et compléter le tableau suivant en donnant les valeurs à trois décimales :

n	10	50	100
u_n			

3) Que peut-on conjecturer pour la limite de (u_n) ?