Multiple, Division euclidienne, Congruence

Propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$

- **Principe du bon ordre** : Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément.
  Il suffira d'exhiber un élément d'une partie de $\mathbb{N}$ pour en déduire un plus petit élément.
- **Principe de la descente infinie** : Toute suite dans $\mathbb{N}$ strictement décroissante est finie.
  On utilise ce principe pour montrer que la suite les restes des divisions successives dans l'algorithme d'Euclide finit par un reste nul.
- **Principe des tiroirs** : Si l'on range $(n+1)$ chaussettes dans n tiroirs, alors au moins un tiroir contiendra au moins 2 chaussettes.
  C'est ce qui permet de déduire un cycle de restes de la division de 2^n par b. Le cycle est au maximum un cycle de b restes.

Multiple, diviseur

- Soit a et b deux entiers relatifs.
  L'entier a est un multiple de l'entier b ssi il existe un entier relatif k tel que $a = kb$.
  On dit aussi que b divise a que l'on peut écrire $b|a$.
- **Conséquence** : comme un entier ne possède qu'un nombre restreint de diviseurs, on cherchera à factoriser une équation ou un problème de divisibilité.
- Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n-2)$ divise $(2n+3)$.

  $2n+3 = k(n-2) \Leftrightarrow 2(n-2)+7 = k(n-2) \Leftrightarrow$

  $(n-2)(k-2) = 7$ donc $(n-2)$ divise 7

  $n-2 = 1$ ou $n-2 = 7$ soit $n = 3$ ou $n = 9$

Opération sur les multiples - ROC

Théorème : Si a divise b et c, alors a divise toute combinaison linéaire de b et de c soit $\alpha b + \beta c$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$, on donne $a = 9k-4$ et $b = 5k-3$.

Si d divise a et b, alors d divise 7 car :

$$5a - 9b = 45k - 20 - 45k + 27 = 7$$

Les valeurs possibles pour d sont alors 1 et 7.

Division euclidienne

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On appelle division euclidienne de a par b, l'opération qui au couple (a,b) associe le couple (q,r) tel que :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$$

Tableau de congruence

Résolution de $2x^2 + x - 1 \equiv 0\ (5)$

$x \equiv\ (5)$	0	1	2	3	4
$2x^2 \equiv\ (5)$	0	2	3	3	2
$x-1 \equiv\ (5)$	4	0	1	2	3
$2x^2+x-1 \equiv\ (5)$	4	2	4	0	0

Les solutions sont : $x \equiv 3\ (5)$ et $x \equiv 4\ (5)$

Congruence

Soit $n \geqslant 2$ et a et b deux entiers relatifs.

$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow$
a et b ont même reste dans la division par n

Deux entiers sont congrus modulo n s'ils sont séparés par un multiple de n :

$$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow a - b \equiv 0\ (n)$$

La congruence est une relation d'équivalence, elle est : réflexive, symétrique et
transitive : $a \equiv b\ (n)$ et $b \equiv c\ (n)$ alors $a \equiv c\ (n)$

Divisibilité et reste

Déterminer le reste de la division de 2018^{2017} par 7.

- $2018 \equiv 2\ (7)$, car $2018 = 7 \times 288 + 2$
- On établit le cycle des restes de la division de 2^n par 7 :
  $2^0 \equiv 1\ (7)$, $2^1 \equiv 2\ (7)$, $2^2 \equiv 4\ (7)$, $2^3 \equiv 8 \equiv 1\ (7)$
  Le cycle est de 3.
- $2017 \equiv 1\ (3)$, car $2017 = 3 \times 672 + 1$
- On conclut : $2018^{2017} \equiv 2^1\ (7)$. Le reste est 2.

Congruence et compatibilité - ROC

Soit $a \equiv b\ (n)$ et $c \equiv d\ (n)$.
La congruence est compatible avec :

- L'addition : $a + c \equiv b + d\ (n)$
- La multiplication : $ac \equiv bd\ (n)$
- La puissance : $a^k \equiv b^k (n)$, $k \in \mathbb{N}$

A l'aide de ces propriétés, la congruence permet de résoudre des problèmes de divisibilité, de restes ou d'équations.

Notion de base

Conversion de la base b vers la base 10

- Dans un système de position en base b, on note un nombre N par $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{\,b}$.
  Ce nombre N s'écrit dans notre système décimal de position par :

  $$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{\,b} = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \dots + a_1 \times b^1 + a_n \times b^0$$

  Avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $0 \leqslant a_i < b$.

- Pour une base supérieure à 10,
  Si $b = 12$, on notera α et β les chiffres 10 et 11.
  Si $b = 16$, on notera A, B, C, D, E, F les chiffres 10, 11, 12, 13, 14, 15.

- **Exemples** :

  $\overline{110111}^{\,2} = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 55$
  $\overline{231}^{\,5} = 2 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 1 \times 5^0 = 66$
  $\overline{1\alpha 6}^{\,12} = 1 \times 12^2 + 10 \times 12^1 + 6 \times 12^0 = 270$

Conversion de la base 10 vers la base b

- Pour convertir un nombre N de notre système décimal en un nombre en base b, on effectue les divisions successives de N par b.
  La suite de ces divisions successives et finie de dernier terme 0.

  $$\left.\begin{array}{r} N = bq_0 + r_0 \\ q_0 = bq_1 + r_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ q_{n-1} = b(0) + r_n \end{array}\right\} \Rightarrow N = \overline{r_n r_{n-1} \dots r_1 r_0}^{\,b}$$

- **Exemples** :

  496 en base 7 :

  $$\left.\begin{array}{r} 496 = 7 \times 70 + 6 \\ 70 = 7 \times 10 + 0 \\ 10 = 7 \times 1 + 3 \\ 1 = 7 \times 0 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 496 = \overline{1\,306}^{\,7}$$

  2 278 en base 12 :

  $$\left.\begin{array}{r} 2278 = 12 \times 189 + 10 \\ 189 = 12 \times 15 + 9 \\ 15 = 12 \times 1 + 3 \\ 1 = 12 \times 0 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\,278 = \overline{1\,39\alpha}^{\,12}$$

Règles de divisibilité

1) Par une terminaison : 2, 5, 10, 25, 4

   - Un entier est divisible par 2 ssi il se termine par 0, 2, 4, 6, 8.
   - Un entier est divisible par 5 ssi il se termine par 0 ou 5.
   - Un entier est divisible par 10 ssi il se termine par 0.
   - Un entier est divisible par 25 ssi il se termine par 00, 25, 50, 75.
   - Un entier est divisible par 4 ssi le nombre formé par les 2 derniers chiffres est divisible par 4.

     1 932 est divisible par 4 car 32 est divisible par 4,
     par contre 1 714 ne l'est pas car 14 n'est pas divisible par 4

2) Par somme de ses chiffres : 3 et 9

   - Un entier est divisible par 3 (respectivement par 9) si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9).

     8 232 est divisible par 3 car : $8 + 2 + 3 + 5 = 15$ et 15 est divisible par 3.
     4 365 est divisible par 9 car : $4 + 3 + 6 + 5 = 18$ et 18 est divisible par 9

3) Par différence de ses chiffres : 11

   - Un entier de trois chiffres est divisible par 11 si la somme des chiffres extrêmes est égale à celui du milieu.

     ⚠ la réciproque est fausse.

     451 est divisible par 11 car : $4 + 1 = 5$. On a alors $451 = 11 \times 41$
     ⚠ $825 = 75 \times 11$ divisible par 11 mais $8 + 5 = 13 \neq 2$

   - D'une façon générale un entier est divisible par 11 ssi la différence entre la somme des chiffres de rangs pairs et la somme des chiffres de rangs impairs est divisible par 11.

     6 457 est divisible par 11 car : $(7 + 4) - (5 + 6) = 11 - 11 = 0$ et 0 est divisible par 11.
     4 939 est divisible par 11 car : $(9 + 9) - (3 + 4) = 18 - 7 = 11$ et 11 est divisible par 11.

⚠ Toutes les règles de divisibilité peuvent être démontrées par la congruence.