Les matrices
Prise de contact

Une matrice est un tableau de nombres

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} col1 & col2 & col3 \end{array} \\ \begin{array}{c} ligne1 \\ ligne2 \\ ligne3 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

Le couple (i, j) permet de repérer la position du coefficient dans la matrice

Théorème : Deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont :
- même dimension
- les coefficients de même position égaux

⚠ On ne peut pas comparer une matrice rectangle avec une matrice carrée...

- Le produit de deux matrices est une opération délicate.
  Elle n'est possible que si une condition de compatibilité sur les dimensions est satisfaite.
  On définit ainsi le produit d'une matrice (n, p) par une matrice matrice (p, m). La matrice résultante est (n, m).
- Si $\mathbf{M}$ est une matrice carrée d'ordre n :
  $\mathbf{M} \times \mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n \times \mathbf{M} = \mathbf{M}$

⚠

Le produit matriciel n'est pas commutatif en général. Ainsi, sous réserve que les produits existent :
$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$

- On dit qu'une matrice (n, p) lorsqu'elle est composée de n lignes et de p colonnes.
- Le nombre $n \times p$ est appelé dimension de la matrice

⚠

Les opérations sur les matrices :
- la transposition
- la somme
- le produit par un réel λ
- le produit ⚠

Si $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible alors :
$\mathbf{M} \times \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1} \times \mathbf{M} = \mathbf{I}_n$
où $\mathbf{I}_n$ est la matrice identité d'ordre n

Une matrice carrée $\mathbf{M}$ d'ordre n peut admettre une matrice inverse notée $\mathbf{M}^{-1}$

Quelques cas particuliers

Si $n = p$, on dit que la matrice est carrée. Cette sous-famille est très importante car riche.
On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficient réels

- Si $n = p = 1$ la matrice est réduite à un unique coefficient !
- Si $n = 1$, la matrice est constituée d'une seule ligne. On parle alors de matrice ou de vecteur ligne.
- Si $p = 1$, la matrice est constituée d'une seule colonne. On parle alors de matrice ou de vecteur colonne

La matrice carrée d'ordre n définie par : $\begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \\ a_{ii} = 1 \end{cases}$
est appelée matrice identité d'ordre n. Elle joue dans le produit de matrices le même rôle que celui du "1" dans le produit de réels.
On la note $\mathbf{I}_n$

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : $\mathbf{I}_n$ est un cas particulier de matrice diagonale

Transposer une matrice consiste intervertir lignes et colonnes.
On note en général ${}^t\mathbf{M}$ la matrice transposée de $\mathbf{M}$.
Si $\mathbf{M}$ est une matrice (n, p) alors ${}^t\mathbf{M}$ est une matrice (p, n).
Certaines matrices vérifient $\mathbf{M} = {}^t\mathbf{M}$. On dit dans cas que $\mathbf{M}$ est une matrice symétrique.

Condition nécessaire :
On ne peut additionner que des matrices de même dimension.
Faire la somme $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ consiste alors à faire la somme des coefficients de même position.

Soit λ un nombre réel.
Multiplier la matrice $\mathbf{M}$ par λ consiste à multiplier chaque coefficient de $\mathbf{M}$ par λ.
Lorsque $\lambda = 0$, la matrice $\lambda\mathbf{M}$ est la matrice nulle, définie par $a_{ij} = 0, \ \forall i, j$

Compléments

1) Une condition nécessaire pour qu'une matrice soit inversible est que la matrice soit carrée.

   ⚠ Malheureusement, il ne s'agit pas d'une condition suffisante !

   Cas particulier des matrices carrées d'ordre 2 :

   $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{M}) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad ad - bc \neq 0$$

   $$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2) Pour exhiber l'inverse d'une matrice carrée $\mathbf{A}$, on exploite, lorsqu'elle existe, une combinaison linéaire bien choisie, bâtie sur $\mathbf{A}$.

   Exemple : Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On vérifie par exemple que

   $$6\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \times (6\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}) = \mathbf{I}_3$$

   $\mathbf{A}$ est alors inversible et $\mathbf{A}^{-1} = 6\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}$.

3) Une question classique : Soit $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   On suppose que : $\mathbf{A} = \mathbf{P} \times \mathbf{D} \times \mathbf{P}^{-1}$ où $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale d'ordre n.

   Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{A}^n = \mathbf{P} \times \mathbf{D}^n \times \mathbf{P}^{-1}$

   Idée de preuve :

   Initialisation : immédiate.

   Hérédité : pour n fixé, on suppose que $\mathbf{A}^n = \mathbf{P} \times \mathbf{D}^n \times \mathbf{P}^{-1}$ (hr),
   montrons que $\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{P} \times \mathbf{D}^{n+1} \times \mathbf{P}^{-1}$.

   On a : $\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n \times \mathbf{A} \overset{\text{hr}}{=} (\mathbf{P} \times \mathbf{D}^n \times \mathbf{P}^{-1}) \times (\mathbf{P} \times \mathbf{D} \times \mathbf{P}^{-1})$ or $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{I}_n$
   $= \mathbf{P} \times \mathbf{D}^n \times \mathbf{D} \times \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \times \mathbf{D}^{n+1}\mathbf{P}^{-1}$