Révision du 26 mai 2015 : Multiples - Division - Algorithme d'Euclide - PGCD - Théorèmes de Bézout et Gauss

EXERCICE 1

Cours

1) Trouver tous les diviseurs de 96. Vérifier votre résultats en calculant le nombre de diviseurs.
2) d divise $5n+1$ et $3n-4$. Montrer que d divise 23. Quelles sont les valeurs possibles pour d ?
3) Diviser -17 par 3. L'égalité $1600 = 17\times 93+19$ correspond-elle à la division de 1600 par 17 ?
4) Démontrer que $2011^{2011} \equiv 2\ [7]$.
5) Déterminer, par l'algorithme d'Euclide, le pgcd de 935 et 517. En déduire le ppcm de 935 et 517.
6) Démontrer le théorème de Bézout :
   $\text{pgcd}(a,b)=1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists (u,v)\in\mathbb{Z}^2, \quad au+bv=1$
7) Déterminer, en remontant l'algorithme d'Euclide, un solution à l'équation $59x+27y = 1$. En déduire toutes les solution dans $\mathbb{N}^2$
8) Démontrer le théorème de Gauss :
   a divise bc et $\text{pgcd}(a,b)=1$ alors a divise c.

EXERCICE 2

N$^{\text{lle}}$ Calédonie novembre 2015

On considère l'algorithme suivant, où A et B sont des entiers naturels tels que $A<B$:

```
Variables : A et B entiers naturels (A < B)
            D est un entier
Entrées et initialisation
    Lire A et B
    Affecter à D la valeur de B − A
Traitement
    tant que D > 0 faire
        B prend la valeur de A
        A prend la valeur de D
        si B > A alors
            D prend la valeur de B − A
        sinon
            D prend la valeur de A − B
        fin
    fin
Sorties : Afficher A
```

1) On entre $A = 12$ et $B = 14$.
   En remplissant le tableau donné en **annexe**, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.
2) Cet algorithme calcule la valeur du pgcd des nombres A et B.
   En entrant $A = 221$ et $B = 331$, l'algorithme affiche la valeur 1.
   a) Justifier qu'il existe des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation
   $$\text{(E)} \qquad 221x - 331y = 1$$
   b) Vérifier que le couple $(3\ ;\ 2)$ est une solution de l'équation (E).
   En déduire l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
3) On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par
   $$u_n = 2 + 221n \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 & = & 3 \\ v_{n+1} & = & v_n + 331 \end{cases}$$
   a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.
   b) Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(p\ ;\ q)$ tels que
   $u_p = v_q, \quad 0 \leqslant p \leqslant 500 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant q \leqslant 500.$

A	B	D
12	14	

EXERCICE 3

Liban 27 mai 2015

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n, la probabilité de fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.
On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1) Calculer p_1 et q_1.

2) On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n). Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			

Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel n.

Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites (p_n) et (q_n) ?

⚠ On pourra faire un graphe probabiliste.

3) On définit les matrices $\mathbf{M}$ et, pour tout entier naturel n, $\mathbf{X}_n$ par

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

On admet que $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{M} \times \mathbf{X}_n$ et que, pour tout entier naturel n,
$\mathbf{X}_n = \mathbf{M}^n \times \mathbf{X}_0$.

On définit les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ par $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $\mathbf{M} = \mathbf{A} + 0,5\mathbf{B}$.

b) Vérifier que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, et que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif,
$\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ et $\mathbf{B}^n = \mathbf{B}$.

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{M}^n = \mathbf{A} + 0,5^n\mathbf{B}$.

d) En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.

e) À long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?