Sections planes de surfaces. Exo

Exercice 1 :

Le cône de Hachette

Soit (S) la surface d'équation : $x^2 + y^2 = 2yz$ et P le plan d'équation : $z = 1$ et Γ le cercle du plan P, de centre $\Omega(0, 1, 1)$ et de rayon 1.

1) Montrer qu'un point $m(x, y, z)$ appartient à Γ si et seulement si, $x^2 + y^2 - 2y = 0$ et $z = 1$.

2) Soit $m_0(x_0, y_0, 1)$ un point de Γ.
Montrer que la droite (Om_0) est contenue dans (S).

3) Prouver que, si $M(x, y, z)$ est un point de (S) distinct de O, alors $z \neq 0$ et le point $m\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$ appartient à Γ et à (OM).

4) Déduire de ce qui précède que la surface (S) est constituée de toutes les droites (Om), m décrivant le cercle Γ.

Exercice 2 :

L'Hyperboloïde à une nappe

A) **Étude d'une branche d'hyperbole.**
Soit (H) la courbe contenue dans le plan (yOz) d'équation :

$$y^2 - z^2 = 1 \quad \text{où} \quad y \geqslant 0$$

On pose : $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\jmath} - \vec{k})$ et $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\jmath} + \vec{k})$.

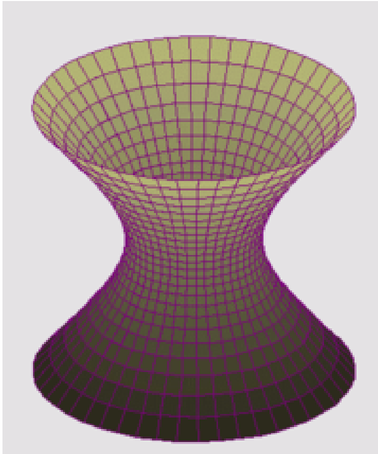
1) Montrer que $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal du plan (yOz).
2) Soit M un point du plan (yOz), (y, z) ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et (Y, Z) ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Exprimer y et z en fonction de Y et Z.
3) En déduire que (H) est une branche de l'hyperbole d'équation $YZ = \frac{1}{2}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

B) **Surface de révolution**

Soit H_1 la surface de révolution obtenue par rotation autour de l'axe (Oz) de la demi-hyperbole (H).

Montrer que H_1 a pour équation :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$



La surface H_1, l'hyperboloïde à une nappe

C) **Une génération de H_1.**

On suppose que le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une repère orthonormal direct du plan (xOy) et l'on note Γ_0 le cercle du plan (xOy), de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

Étant donné un réel θ, on désigne par :

➪ P et Q, les points de Γ_0 définis par :

$$(\vec{\imath}, \overrightarrow{OP}) = \theta \ [2\pi] \quad \text{et} \quad (\vec{\imath}, \overrightarrow{OQ}) = \theta + \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$

➪ P', l'image de P par la translation de vecteur $-\vec{k}$.

➪ Q', l'image de Q par la translation de vecteur $\vec{k}$.

1) Faire un figure soignée en perspective cavalière représentant les points P, Q, P' et Q' lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

2) a) Préciser les sections Γ et Γ' de la surface H_1 par les plan d'équation respectives $z = -1$ et $z = 1$.

   b) Montrer que, lorsque θ varie dans $\mathbb{R}$, Γ et Γ' sont les lieux géométriques respectifs des points P' et Q'.

3) Prouver que les coordonnées des points P' et Q' sont calculées par :

$$P'(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{2}\sin\theta, -1)$$
$$Q'(-\sqrt{2}\sin\theta,\ \sqrt{2}\cos\theta, 1)$$

4) Soit λ un réel et M le barycentre du système :

$$\{(P', \lambda), (Q', 1 - \lambda)\}$$

   a) Exprimer les coordonnées (x, y, z) de M en fonction de λ et θ.

   b) Calculer alors $x^2 + y^2 - z^2$ et en déduire que M appartient à H_1.

5) Établir, à partir des résultats de la question précédente, que quel que soit le réel θ, la droite $(P'Q')$ est "toute entière" contenue dans la surface H_1.

Note : *on peut montrer que, réciproquement, tout point de H_1 appartient à une droite $(P'Q')$. Ainsi (H) est une surface réglée.*

Les châteaux d'eau

La forme des château d'eau est fréquement celle d'un hyperboloïde à une nappe qui assure un béton sans fissures, première condition d'étanchéité absolue.

Un simple paquet de spaguettis permet, à peu de frais, de visualiser les droites de l'hyperboloïde à une nappe définies dans ce problème.