Annales spé par types

1	Polynésie juin 2011	Arithmétque
2	Antilles-Guyanne juin 2011	Arithmétque
3	Métropole juin 2011	Arithmétque
4	Amérique du Nord mai 2011	Arithmétque
5	Amérique du Sud nov 2010	Arithmétque
6	Polynésie juin 2010	Arithmétque
7	Nouvelle-Calédonie Nov 2009	Arithmétque
8	Métropole sept 2009	Arithmétque
9	Métropole juin 2009	Arithmétque
10	Asie juin 2009	Arithmétque
11	Liban juin 2009	Arithmétque
12	Amérique du Nord juin 2009	Arithmétque

13	Liban juin 2011	Similitude
14	Nlle Calédonie Nov 2010	Similitude
15	Métropole Sept 2010	Similitude
16	La Réunion Sept 2010	Similitude
17	Antille Guyanne juin 2010	Similitude
18	Asie juin 2010	Similitude
19	Centre étrangers juin 2010	Similitude
20	La Réunion juin 2010	Similitude
21	Métropole juin 2010	Similitude
22	Amérique du sud nov 2009	Similitude
23	Pondichéry avril 2009	Similitude
24	Nouvelle-Calédonie nov 2008	Similitude

25	La Réunion juin 2011	arithmétique et similitude
26	Amérique du Nord juin 2010	arithmétique et similitude
27	Liban juin 2010	arithmétique et similitude
28	Antille Guyane sept 2008	arithmétique et similitude
29	La Réunion et Métropole sept 2008	arithmétique et similitude

30	Centres Etrangers juin 2011	QCM
31	Antille Guyane juin 2009	QCM

Arithmétique

1 Polynésie juin 2011

Retour au tableau

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a est un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 10u_n + 21.$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, l' écriture décimale de u_n.
3) Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4) Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
5) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.
6) a) Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

2 Antilles-Guyanne juin 2011

Retour au tableau

1) On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.
   b) En déduire une solution particulière de l'équation (E).
   c) Résoudre l'équation (E).
   d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$. On note C l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $0 \leqslant x \leqslant 50$ et $0 \leqslant y \leqslant 50$.
   Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble C et dont les coordonnées sont des nombres entiers.
2) On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Démontrer que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.
   b) Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

   Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?
   c) En déduire que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.
3) Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\,;\,y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

3 Métropole juin 2011

Retour au tableau

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.

Théorème de BÉZOUT :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS :
Soient a, b, c des entiers relatifs.
Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1) En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.

2) Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.
Déduire du théorème de GAUSS que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0$ $[p]$ et $a \equiv 0$ $[q]$, alors $a \equiv 0$ $[pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 \ [17] \\ n \equiv 3 \ [5] \end{cases}$$

1) Recherche d'un élément de $\mathscr{S}$.
On désigne par (u, v) un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.

a) Justifier l'existence d'un tel couple (u, v).

b) On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
Démontrer que n_0 appartient à $\mathscr{S}$.

c) Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathscr{S}$.

2) Caractérisation des éléments de $\mathscr{S}$

a) Soit n un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$.
Démontrer que $n - n_0 \equiv 0$ $[85]$.

b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si n peut s'écrire sous 1a forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.

3) Application
Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
Combien a-t-elle de jetons ?

4 Amérique du Nord mai 2011

Retour au tableau

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p, alors
$q^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ ».
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

1) Calculer les six premiers termes de la suite.
2) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
3) Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.

   On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n).
4) Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
5) Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.
   a) Montrer que : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod p$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod p$.
   b) En déduire que $6u_{p-2} \equiv 0 \pmod p$.
   c) Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?

5 Amérique du Sud nov 2010

Retour au tableau

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.
L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1) Quelques résultats
   a) Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
   b) Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
   c) Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.
   d) Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:

$$n^8 \equiv 1 \mod d.$$

2) Recherche de critères

   Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1 \mod d$.
   a) Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s, montrer que s divise k.
   b) En déduire que s est un diviseur de 8.
   c) Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d - 1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.
3) Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.

   Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas $s = 1$, $s = 2$ puis $s = 4$, conclure que p est congru à 1 modulo 8.
4) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.

   Indication : la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, . . .

6 Polynésie juin 2010

Retour au tableau

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1) Donner une solution particulière de l'équation (E)
2) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3 \times 2^m = 1$ (F).

1) On suppose $m \leqslant 4$.
   Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2) On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.
   a) Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors
      $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
   b) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
   c) En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors
      $7^n \equiv 1 \pmod{5}$.
   d) Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3) Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

7 Nouvelle-Calédonie Nov 2009

Retour au tableau

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1) On considère l'équation notée (E) :

$$3x + 7y = 10^{2n} \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

   a) Déterminer un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$.
      En déduire une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de l'équation (E).
   b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de (E).
2) On considère l'équation notée (G)

$$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

   a) Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo 7).
      Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).
   b) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.							

   c) Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
      En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

8 Métropole sept 2009

Retour au tableau

1) a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2 009 par 11.
   b) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.
   c) Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009} + 2\,009$ par 11.
2) On désigne par p un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n le nombre $A_n = 2^n + p$.
   On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1}.
   a) Montrer que d_n divise 2^n.
   b) Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p. Justifier.
   c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
      Déterminer la parité de d_n en fonction de celle de p.
      En déduire le PGCD de $2^{2\,009} + 2\,009$ et $2^{2\,010} + 2\,009$.

9 Métropole juin 2009

Retour au tableau

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1) a) Déterminer l'ensemble des couples (x,y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation (E) : $8x - 5y = 3$.
   b) Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p,\ q)$ de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.
      Montrer que le couple $(p,\ q)$ est solution de l'équation (E) et en déduire que : $m \equiv 9 \pmod{40}$.
   c) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.
2) a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1(\text{modulo } 7)$.
   b) Quel est le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009}$ par 7 ?
3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
   On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
   On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.
   a) Vérifier que $10^3 \equiv -1(\text{modulo } 7)$.
   b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

10 Asie juin 2009

Retour au tableau

1) On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que

$$\begin{cases} N \equiv 5 & (13) \\ N \equiv 1 & (17) \end{cases}$$

   a) Vérifier que 239 est solution de ce système.
   b) Soit N un entier relatif solution de ce système.
      Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.
   c) Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.
   d) En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.
   e) Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18 \quad (221)$ et $\begin{cases} N \equiv 5 & (13) \\ N \equiv 1 & (17) \end{cases}$.

2) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infruxtueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   a) Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k \equiv 1 \quad (17)$?
   b) Existe-t-il un entier naturel l tel que $10^l \equiv 18 \quad (221)$?

11 Liban juin 2009

Retour au tableau

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \mod 10\,000$.

Partie A

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16.
2) En déduire que $\mathit{nombre}2009^{8\,001} \equiv 2009 \mod 16$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2\,009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1) a) Démontrer que u_0 est divisible par 5.
   b) Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} = u_n \left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right].$$
   c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.
2) a) Vérifier que $u_3 = 2\,009^{250} - 1$ puis en déduire que $2\,009^{250} \equiv 1 \mod 625$.
   b) Démontrer alors que $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \mod 625$.

Partie C

1) En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2\,009^{8\,001} - 2\,009$ est divisible par 10 000.
2) Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

12 Amérique du Nord juin 2009

Retour au tableau

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1\ ;\ 46]$.

1) On considère l'équation

$$(E):\quad 23x + 47y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a) Donner une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ de (E).

b) Déterminer l'ensemble des couples $(x,\ y)$ solutions de (E).

c) En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1 \quad (47)$.

2) Soient a et b deux entiers relatifs.

a) Montrer que si $ab \equiv 0 \quad (47)$ alors $a \equiv 0 \quad (47))$ ou $b \equiv 0 \quad (47)$.

b) En déduire que si $a^2 \equiv 1 \quad (47)$ alors $a \equiv 1 \quad (47)$ ou a $a \equiv -1 \quad (47)$.

3) a) Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1 \quad (47)$.

Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que

$p \times inv(p) \equiv 1 \quad (47)$.

Par exemple :

$inv(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1 \quad (47)$, $inv(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1 \quad (47)$,

$inv(3) = 16$ car $3 \times 16 \equiv 1 \quad (47)$.

b) Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = inv(p)$?

c) Montrer que $46! \equiv -1 \quad (47)$.

Similitude

13 Liban juin 2011

Retour au tableau

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On suppose connu le résultat suivant :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$ à 2π près.

Démontrer que, quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', on a : $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à 2π près.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_\mathrm{A} = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_\mathrm{B} = 2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

1) Déterminer le module et un argument de z_A.
2) a) Écrire $\dfrac{z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{A}}$ sous forme algébrique.
   b) Montrer que $\dfrac{z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{A}} = \left(1 + \sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   c) En déduire la forme exponentielle de z_B.
3) On note B_1 l'image du point B par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$.
   a) Déterminer l'affixe du point B_1.
   b) En déduire que le point B_1 est le symétrique du point B par rapport à l'axe $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u}\right)$.
4) Soit M un point du plan. On note M_1 l'image du point M par la rotation r et M' le symétrique du point M_1 par rapport à l'axe $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u}\right)$.

   On désigne par (E) l'ensemble des points M du plan tels que $M' = M$.
   a) Montrer que les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).
   b) Soit M un point distinct du point O.

      Son affixe z est égale à $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel.

      Montrer que l'affixe z' du point M' est égale à $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$ puis déterminer l'ensemble des valeurs du réel θ telles que M appartienne à l'ensemble (E).
   c) Déterminer l'ensemble (E).

14 Nlle Calédonie Nov 2010

Retour au tableau

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe

$$z' = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\overline{z}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
Soient les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_{\mathrm{B}} = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$.
On note A′ et B′ les images respectives des points A et B par f.

Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.

1) a) Écrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.

   b) Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.

   c) En déduire la nature du triangle OA′B′.

   d) Montrer que l'affixe $z_{\mathrm{A}'}$ de A′ vérifie l'égalité : $z_{\mathrm{A}'} = 2z_{\mathrm{A}}$.
   En déduire la construction de A′ et B′.

2) On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$, et s la symétrie orthogonale d'axe $\left(\mathrm{O} ; \vec{u}\right)$. On pose $g = r \circ s$.

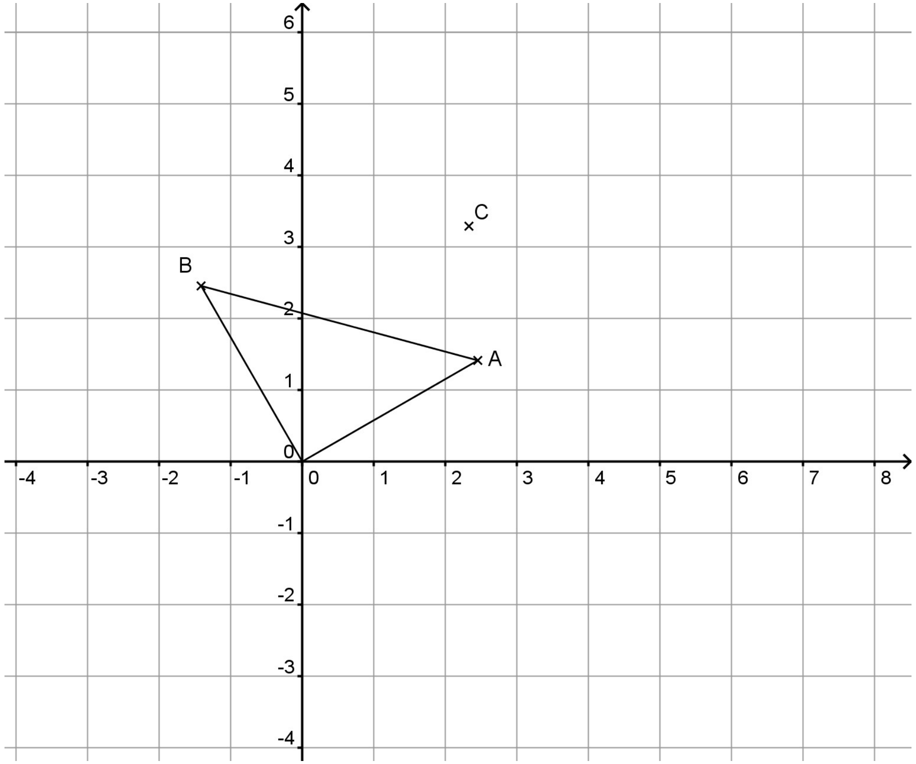
   a) Déterminer l'écriture complexe de la transformation g.

   b) Montrer que les points O et A sont invariants par g.

   c) En déduire la nature de la transformation g.

3) a) Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.

   b) Sur la figure placée en **ANNEXE**, un point C est placé. Faire la construction de l'image C′ de C par la transformation f.



15 Métropole Sept 2010

Retour au tableau

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les deux rectangles OABC et DEFG où les points A, B, C, D, E, F, G ont pour affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -2,\ z_{\mathrm{B}} = -2 + \mathrm{i},\ z_{\mathrm{C}} = \mathrm{i},\ z_{\mathrm{D}} = 1,\ z_{\mathrm{E}} = 1 + 3\mathrm{i},\ z_{\mathrm{F}} = \frac{5}{2} + 3\mathrm{i}, z_{\mathrm{G}} = \frac{5}{2}.$$

Voir la figure donnée en annexe.

1) On considère la similitude directe s transformant O en D et A en E.

a) Justifier que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = -\frac{3}{2}\mathrm{i}z + 1$.

b) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

c) Quelle est l'image du rectangle OABC par la similitude s ?

2) On considère la similitude indirecte s' d'écriture complexe $z' = -\frac{2}{3}\mathrm{i}\overline{z} + \frac{5}{3}\mathrm{i}$.

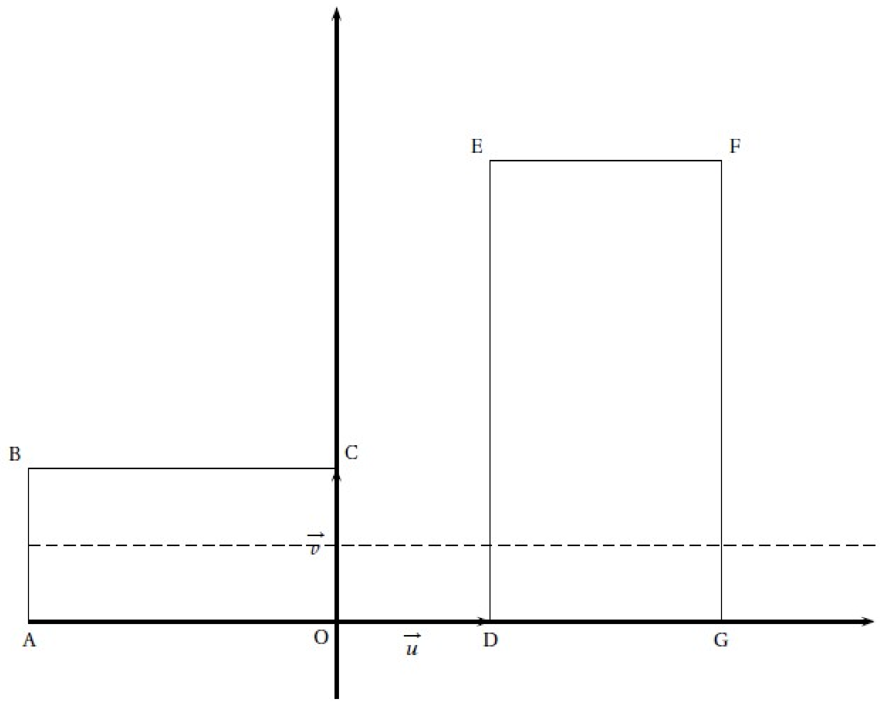
a) Déterminer l'image du rectangle DEFG par la similitude s'.

b) On considère la similitude $g = s' \circ s$.

Déterminer l'image du rectangle OABC par la similitude g.

c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La similitude g a-t-elle des points fixes ? Que peut-on en conclure pour g ?



16 La Réunion Sept 2010

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique : 8 centimètres.

On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+\mathrm{i})z.$$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.
2) On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.
   a) Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$
   b) Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.
3) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative meme non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soient n et p deux entiers naturels. À quelle condition sur n et p les points M_n et M_p sont-ils alignés avec l'origine O du repère ?

17 Antille Guyanne juin 2010

Retour au tableau

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.

1) **Restitution organisée de connaissances**
   On utilisera sans démonstration les deux propriétés suivantes :
   Propriété 1 : Toute similitude indirecte qui transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' admet une expression complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
   Propriété 2 : Soit C une point d'affixe c. Pour tout point D, distinct de C, d'affixe d et pour tout point E, distinct de C, d'affixe e, on a :
   $$\left(\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{CE}\right) = \arg\left(\frac{e-c}{d-c}\right)\ (2\pi).$$
   Question : Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.
2) Soient les points C et D d'affixes respectives $c = 3$ et $d = 1 - 3i$, et $\mathcal{S}_1$ la similitude qui à tout point M du plan associe le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u}\right)$ des réels.
   a) Placer les points C et D puis leurs images respectives C_1 et D_1 par $\mathcal{S}_1$. On complètera le figure au fur et à mesure de l'exercice.
   b) Donner l'expression complexe de $\mathcal{S}_1$.
3) Soit $\mathcal{S}_2$ la similitude directe définie par :
   - le point C_1 et son image C' d'affixe $c' = 1 + 4i$;
   - le point D_1 et son image D' d'affixe $d' = -2 + 2i$.

   a) Montrer que l'expression complexe de $\mathcal{S}_2$ est : $z' = iz + 1 + i$.
   b) En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.
4) Soit $\mathcal{S}$ la similitude définie par $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_1$.
   Déterminer l'expression complexe de $\mathcal{S}$.
5) On pourra admettre désormais que $\mathcal{S}$ est la similitude indirecte d'expression complexe :
   $$z' = i\bar{z} + 1 + i.$$

a) Quelle est l'image de C par $\mathcal{S}$? Quelle est l'image de D par $\mathcal{S}$?

b) Soit H le point d'affixe h tel que : $h - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(d - c)$.
Montrer que le triangle CDH est équilatéral direct.

c) Soit H' l'image de H par $\mathcal{S}$. Préciser la nature du triangle $C'D'H'$ et construire le point H' (on ne demande pas de calculer l'affixe h' du point H').

18 Asie juin 2010

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(A\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère les points B, C et H d'affixes respectives :

$$b = 5i, \quad c = 10 \quad \text{et} \quad h = 2 + 4i.$$

Construire une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1) Étude de la position du point H
   a) Démontrer que le point H appartient à la droite (BC).
   b) Calculer $\dfrac{h}{h-c}$, et en déduire que $\left(\overrightarrow{HC}\,,\overrightarrow{HA}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
2) Étude d'une première similitude
   a) Calculer les rapports : $\dfrac{BH}{AH}$, $\dfrac{BA}{AC}$ et $\dfrac{AH}{CH}$.
   b) Démontrer qu'il existe une similitude directe S_1 qui transforme le triangle CHA en le triangle AHB.
   c) Déterminer l'écriture complexe de cette similitude S_1 ainsi que ses éléments caractéristiques.
3) Étude d'une seconde similitude
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation
   On note S_2 la similitude qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :
   $$z' = (-1 - 2i)\overline{z} + 10.$$
   Démontrer que S_2 est composée d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ), et d'une similitude directe dont le centre Ω appartient à (Δ). Préciser (Δ).
4) Étude d'une composée
   a) Calculer le rapport de la similitude composée $S_2 \circ S_1$.
   b) En déduire le rapport entre les aires des triangles CHA et BAC.

19 Centre étrangers juin 2010

Retour au tableau

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives :

$$a = 1 + i,\ b = -1 + 2i,\ c = 2 + 3i,\ m = 7 - 5i,\ n = 5 - i,\ p = 9 + i.$$

1) a) Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.
   b) Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP.
   c) En déduire que ces deux triangles sont semblables.

   Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence deux similitudes qui transforment le triangle ABC en le triangle MNP.

2) Une similitude directe

   Soit s la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P.
   a) Montrer qu'une écriture complexe de la similitude s est :
   $$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i.$$
   b) Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude s.
   c) Vérifier que la similitude s transforme le point C en M.

3) Une similitude indirecte

   Soit s' la similitude dont l'écriture complexe est :
   $$z' = 2i\bar{z} + 3 - 3i.$$
   a) Vérifier que : $\begin{cases} s'(A) & = & N \\ s'(B) & = & M \\ s'(C) & = & P \end{cases}$
   b) Démontrer que s' admet un unique point invariant K d'affixe $k = 1 - i$.
   c) Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\dfrac{1}{2}$ et J le point d'affixe 2.
   On pose : $f = s' \circ h$.
   Déterminer les images des points K et J par la transformation f. En déduire la nature précise de la transformation f.
   d) Démontrer que la similitude s' est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.

20 La Réunion juin 2010

Retour au tableau

Partie 1 : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

Prérequis :

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe du plan est de la forme $z' = \alpha z + \beta$, où α est un nombre complexe non nul et β est un nombre complexe.

Soient A, B, C, D quatre points du plan ; on suppose d'une part que les points A et C sont distincts et d'autre part que les points B et D sont distincts.

Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = B$ et $s(C) = D$.

Partie 2 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.

On considère le point C tel que $ABCD$ est un carré.

Soit E le milieu du segment $[AD]$, on considère le carré $EDGF$ tel que $\left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.

1) a) Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D, E, F, G. On complètera la figure au cours de l'exercice.

   b) Préciser les nombres complexes a, b, c, d, e, f, g, affixes respectives des points A, B, C, D, E, F et G.

   c) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s du plan telle que $s(D) = F$ et $s(B) = D$.

2) On se propose de préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe s.

   a) Déterminer le rapport k et l'angle θ de la similitude directe s.

   b) Donner l'écriture complexe de cette similitude.

   c) Déterminer, le centre Ω de la similitude directe s.

21 Métropole juin 2010

Retour au tableau

Dans tout l'exercice, $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm).

On désigne par A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$.

1) On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point d'affixe $-\overline{z} + 2$.

   a) Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.

   c) Déterminer l'image par la transformation T du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

2) $\mathscr{C}'$ désigne le cercle de centre O′ d'affixe 2 et de rayon 1.

   a) Construire le point A′ appartenant au cercle $\mathscr{C}'$ tel que : $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{O'A'}}\right) = \dfrac{\pi}{3}\quad$ [modulo 2π].

   b) À tout point M du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe z, on associe le point M' du cercle $\mathscr{C}'$ d'affixe z' tel que : $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M}, \overrightarrow{\mathrm{O'}M'}\right) = \dfrac{\pi}{3}\quad$ [modulo 2π].

   Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z'-2}{z}$. En déduire que $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}z + 2$.

   c) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}z + 2$.

3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   À tout point M du plan, on associe le point M_1 milieu du segment $[MM']$.

   Quel est le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$?

22 Amérique du sud nov 2009

Retour au tableau

On considère un carré direct $ABCD$ (c'est à dire un carré $ABCD$ tel que $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$) de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[DA]$.
Γ_1 désigne le cercle de diamètre $[AI]$ et Γ_2 désigne le cercle de diamètre $[BK]$.

Partie A

1) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que $s(A) = I$ et $s(B) = K$.
2) Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s.
3) a) Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par s.
   b) Soit E l'image par s du point I. Démontrer que E est le milieu du segment $[ID]$.
4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés.
   (On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$).

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(A\ ;\ \dfrac{1}{10}\overrightarrow{AB}\ ;\ \dfrac{1}{10}\overrightarrow{AD}\right)$.

1) Donner les affixes des points A, B, C et D.
2) Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe

$$z' = \frac{\mathrm{i}}{2}z + 5 + 5i$$

3) Calculer l'affixe ω du centre Ω de s.
4) Calculer l'affixe z_{E} du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.
5) Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω.

23 Pondichéry avril 2009

Retour au tableau

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1 + 2i$.

1) Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que :

$$S(O) = A \text{ et } S(A) = B.$$

2) Montrer que l'écriture complexe de S est :

$$z' = (1 - i)z + i$$

   Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).
   On considère la suite de points (A_n) telle que :
   - A_0 est l'origine du repère et,
   - pour tout entier naturel $n, A_{n+1} = S\,(A_n)$.

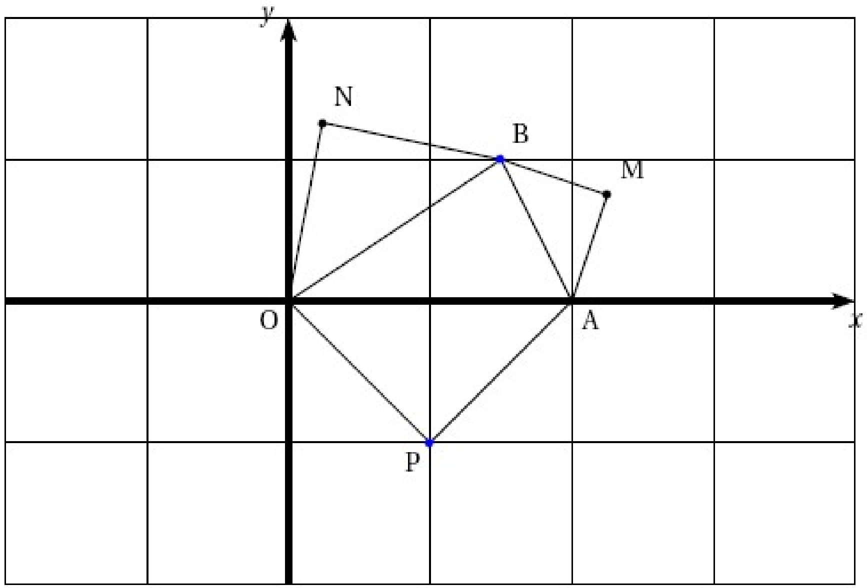
   On note z_n, l'affixe de A_n. (On a donc $A_0 = \mathrm{O},\ A_1 = \mathrm{A}$ et $A_2 = \mathrm{B}$).
3) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1 - i)^n$.
   b) Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$.
   Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right)$.
   c) En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n.
   Construire les points A_3 et A_4.
4) Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite $(\Omega\mathrm{B})$?

24 Nouvelle-Calédonie nov 2008

Retour au tableau

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OI}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \dfrac{3}{2} + i$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1) **À l'aide des transformations**

a) Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2.

b) Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.

c) Justifier que r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.

d) Quelle est l'image du point O par r ?

e) En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2) **En utilisant les nombres complexes**

a) Donner les écritures complexes de s_1 et s_2. On utilisera les résultats de la question 1a).

b) En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N.

c) Donner, sans justification, l'affixe z_P du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

Arithmétique et similitude

25 La Réunion juin 2011

Retour au tableau

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soient A, B deux points du plan d'affixes respectives a et b.
On rappelle que :

* $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a) + 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$.
* L'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport $k (k > 0)$ et d'angle θ est le point C défini par :

$$AC = kAB \quad \text{et} \quad \text{si } A \neq B, \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \theta + 2n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

Exprimer l'affixe c du point C en fonction de a, b, θ et k.

Partie B

On considère l'équation (E) : $3x - 2y = 1$.

1) a) Montrer que le couple $(-1\ ;\ -2)$ est une solution de (E).
   b) Déterminer tous les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E).
2) Soient d et d' les droites d'équations respectives $y = 2x + 4$ et $3x - 2y = 1$.
   a) Vérifier que pour tout entier relatif k, le point A_k de coordonnées $(k-3\ ;\ 2k-2)$ appartient à la droite d.
   On admettra que ce sont les seuls points de d à coordonnées entières.
   b) Montrer que les seuls points de d' à coordonnées entières sont les points $B_{k'}$ de coordonnées $(2k'-1\ ;\ 3k'-2)$ où $k' \in \mathbb{Z}$.
3) a) Existe-t-il deux entiers relatifs k et k' tels que $A_k = B_{k'}$?
   b) Déterminer les entiers relatifs k et k' tels que le segment $[A_kB_{k'}]$ soit parallèle à l'axe des abscisses.
   c) Trouver l'entier q tel que $\overrightarrow{A_{3q}B_{2q}} = 4\vec{u}$.
4) Soit Ω un point quelconque du plan dont l'affixe est notée ω. On note H le milieu du segment $[A_6B_4]$.
   On désigne par f la similitude directe de centre Ω, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   a) Donner l'écriture complexe de la similitude f.
   b) Déterminer l'affixe du point Ω pour que l'image du point H soit l'origine O du repère.

26 Amérique du Nord juin 2010

Retour au tableau

Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de l'équation

$$(E): \quad 16x - 3y = 4.$$

1) Vérifier que le couple (1, 4) est une solution parliculière de (E).
2) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d' affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \sqrt{2}\text{e}^{\frac{3i\pi}{8}}z.$$

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :
le point M_0 a pour affixe $z_0 = \text{i}$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.
On note z_n l'affixe du point M_n
Les points M_0, M_1, M_2 et M_3 sont placés sur la figure donnée en annexe page 6.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.
2) On note g la transformation $f \circ f \circ f \circ f$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $\text{O}M_{n+4} = 4\text{O}M_n$ et que $\left(\overrightarrow{\text{O}M_n}, \overrightarrow{\text{O}M_{n+4}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.
   c) Compléter la figure en construisant les points M_4, M_5 et M_6.
3) Démontrer que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$.
4) Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$.
   a) Exprimer en fonction de n et p une mesure de $\left(\overrightarrow{\text{O}M_p}, \overrightarrow{\text{O}M_n}\right)$.
   b) Démontrer que les points O, M_p et M_n sont alignés si et seulement si $n - p$ est un multiple de 8.
5) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite $[\text{O}x)$. On pourra utiliser la partie A.

27 Liban juin 2010

Retour au tableau

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1) On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, le point A d'affixe $2 - i$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   On note I le milieu du segment $[AB]$.
   Proposition 1 : « La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z' = (1 + i)z - 1 - 2i$. »
2) On appelle S l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $3x - 5y = 2$.
   Proposition 2 : « L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k - 1\ ;\ 3k - 1)$ où k est un entier relatif. »
3) On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 0$ modulo 3, où $(x\ ;\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.
   Proposition 3 : « Il existe des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de (E) qui ne sont pas des couples de multiples de 3. »
4) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   Proposition 4 : « Pour tout entier naturel k $(2 \leqslant k \leqslant n)$, le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier. »
5) On considère l'équation (E') : $x^2 - 52x + 480 = 0$, où x est un entier naturel.
   Proposition 5 : « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E'). »

28 Antille Guyane sept 2008

Retour au tableau

Partie A

On considére le système de congruences :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 2 & \text{(modulo 3)} \\ n & \equiv & 1 & \text{(modulo 5)} \end{array}\right., \text{ où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

1) Montrer que 11 est solution de (S).
2) Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.
3) Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, où k désigne un entier relatif.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repére orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considére l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par :

$$z' = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z \quad \text{et} \quad z'' = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{5}}z.$$

a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.
b) On considére les points A_0 et B_0 d'affixes respectives $a_0 = 2\mathrm{e}^{-2i\frac{\pi}{3}}$ et $b_0 = 4\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{5}}$.
   Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences :

$$A_{n+1} = f(A_n) \quad \text{et} \quad B_{n+1} = g(B_n).$$

   On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n.
   a) Quelle est la nature de chacun des triangles $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$?
   b) En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.
c) a) Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   b) Indiquer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}B_n}, \overrightarrow{\mathrm{O}B_{n+2}}\right)$.
   c) En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.

d) a) Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

b) Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du systéme (S) de la Partie A.

29 La Réunion et Métropole sept 2008

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$.

Partie A

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
On note $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f(A_n)$.

1) a) Étant donné un point M d'affixe z, déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M' image de M par f.

b) Construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\dfrac{1}{2}$.

2) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier n, l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n \mathrm{e}^{\frac{in\pi}{3}}$.

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point A_n appartient à la demi droite $\left[\mathrm{O}\,;\vec{u}\right)$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n.

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1) Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.

2) Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

3) Pour quelles valeurs des entiers n et k le point A_n appartient-il à la demi droite $\left[\mathrm{O}\,;\vec{u}\right)$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?

QCM

30 Centres Etrangers juin 2011

Retour au tableau

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute justification complète sera valorisée.

Question 1
On considère l'équation (E) : $2x + 11y = 7$, où x et y sont des entiers relatifs.
Affirmation
Les seuls couples solutions de (E) sont les couples $(22k-2\ ;\ -4k+1)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Question 2
On considère l'entier $N = 11^{2\,011}$.
Affirmation
L'entier N est congru à 4 modulo 7.

Question 3
On considère, dans le plan complexe, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + \mathrm{i} \quad ; \quad b = 3\mathrm{i} \quad ; \quad c = \left(1 - 2\sqrt{2}\right) + \mathrm{i}\left(1 - \sqrt{2}\right).$$

Affirmation
Le point C est l'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Question 4
On considère, dans le plan complexe, les points A et B d'affixes respectives :

$$a = 1 + \mathrm{i} \quad ; \quad b = 2 - \mathrm{i}.$$

Soit f la similitude d'écriture complexe : $z' = \left(-\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} + \left(\dfrac{12}{5} + \dfrac{6}{5}\mathrm{i}\right)$.
Affirmation
La transformation f est la réflexion d'axe (AB).

Question 5
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, vectk\right)$.
On considère la surface $\mathcal{S}$ dont une équation est : $z = 4xy$.
Affirmation
La section de la surface $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $z = 0$ est la réunion de deux droites orthogonales.

31 Antille Guyane juin 2009

Retour au tableau

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}$.
   On note A le point d'affixe $2i$.

   Affirmation : f est la similitude directe, de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.
2) **Affirmation :** $1991^{2009} \equiv 2\ (7)$.
3) a et b sont deux entiers relatifs quelconques, n et p sont deux entiers naturels premiers entre eux.

   Affirmation : $a \equiv b\ (p)$ si et seulement si $na \equiv nb\ (p)$.
4) L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, vectk\right)$.
   $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient l'équation : $z = x^2 + y^2$. On note $\mathscr{S}$ la section de $\mathscr{E}$ par le plan d'équation $y = 3$.

   Affirmation : $\mathscr{S}$ est un cercle.
5) L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, vectk\right)$.
   $\mathscr{P}$ est la surface d'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$.

   Affirmation : O le seul point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec le plan (yOz) à coordonnées entières.