Correction contrôle de mathématiques

Mardi 23 octobre 2012

Exercice 1

Multiples **4 points**

1) a) Le théorème sur les opérations sur les multiples : Si un entier a divise les entiers b et c, a divise toute combinaison linéaire de b et de c.

Comme d divise $3n+4$ et $9n-5$, d divise alors :

$$3(3n+4)+(-1)(9n-5) = 9n+12-9n+5 = 17$$

b) 17 n'a que deux diviseurs, 1 et 17 donc $d \in \{1, 17\}$

2) a) On développe :

$$(n-1)(n+4)+5 = n^2+4n-n-4+5 = n^2+3n+1$$

b) Si $(n-1)$ divise n^2+3n+1, $(n-1)$ divise $(n-1)(n+4)+5$, donc $(n-1)$ divise 5.

Les diviseurs relatifs de 5 sont : -5, -1, 1, 5.
On obtient alors les solutions suivantes :

$n-1$	-5	-1	1	5
n	-4	0	2	6

Exercice 2

Division euclidienne **2 points**

1) On a l'égalité suivante correspondant à la division euclidienne :

$$63 = bq+17 \quad \text{avec } b > 17 \quad \Leftrightarrow \quad bq = 63-17 = 46 \quad \text{avec } b > 17$$

Les diviseurs de 46 sont : 1, 2, 23, 46. Comme $b > 17$, on a les solutions suivante :

$$\begin{cases} b = 46 \\ q = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b = 23 \\ q = 2 \end{cases}$$

2) On a les égalités suivantes :

$$\begin{cases} n = 152q+13 \\ n = 147q+98 \end{cases}$$

En soustrayant termes à termes, on obtient : $5q = 85$ soit $q = 17$.
On a alors $n = 152 \times 17 + 13 = 2597$.

Exercice 3

ROC **4 points**

1) Voir le cours

2) Voir le cours
3) **Application :** On a 2 013 = $8 \times 251 + 5$
Donc $2013 \equiv 5 \pmod 8 \quad \Leftrightarrow \quad$ par puissance $2013^{2013} \equiv 5^{2013}$
On a $5^2 \equiv 25 \equiv 1 \pmod 8$ et $2013 = 2 \times 1006 + 1$ par puissance et produit, on a :

$$5^{2013} \equiv \left(5^2\right)^{1006} \times 5 \equiv 1^{1006} \times 5 \equiv 5 \pmod 8$$

Conclusion $2013^{2013} \equiv 5 \pmod 8$

Exercice 4

Congruence **3 points**

1) On a la table des restes dans la congruence modulo 4

$x \equiv$	0	1	2	3
$x^2 \equiv$	0	1	0	1
$3x^2 \equiv$	0	3	0	3

2) On a :

$$7x^2 - 4y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 7x^2 - 1 = 4y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 7x^2 - 1 \equiv 0 \pmod 4 \quad \Leftrightarrow$$
$$7x^2 \equiv 1 \pmod 4 \Leftrightarrow 3x^2 \equiv 1 \pmod 4$$

or d'après la table des restes, les restes de $3x^2$ par la division par 4 sont soit 0 soit 3. L'équation n'a donc pas de solution.

3) $(x+3)^2 \equiv 1 \pmod 4$.
D'après la table des restes, on a :

$x + 3 \equiv 1 \pmod 4$
$x \equiv -2 \pmod 4$
$x \equiv 2 \pmod 4$

$x + 3 \equiv 3 \pmod 4$
$x \equiv 0 \pmod 4$

Conclusion : $x \equiv 0 \pmod 4$ ou $x \equiv 2 \pmod 4$. Les solutions dans $\mathbb{Z}$ sont tous les entiers relatifs pairs.

Exercice 5

Codage **7 points**

Partie A

1) On a les restes successifs des restes de la division par 11 des puissances de 5 suivants :

$$5^0 \equiv 1 \pmod{11} \quad , \quad 5^1 \equiv 5 \pmod{11} \quad , \quad 5^2 \equiv 25 \equiv 3 \pmod{11}$$
$$5^3 \equiv 15 \equiv 4 \pmod{11} \quad , \quad 5^4 \equiv 20 \equiv 9 \pmod{11} \quad , \quad 5^5 \equiv 45 \equiv 1 \pmod{11}$$

Le cycle est donc de 5. On divise alors n par 5 : $n = 5k + r$ avec $0 \leqslant r < 5$. On a alors par puissance et produit :

$$5^n \equiv \left(5^5\right)^k \times 5^r \equiv 1^k \times 5^r \equiv 5^r \pmod{11}$$

On obtient alors la table des congruence modulo 11 suivante :

$n \equiv$	0	1	2	3	4
$5^n \equiv$	1	5	3	4	9

2) On a les restes successifs des restes de la division par 11 des puissances de 2 suivants :

$2^0 \equiv 1 \pmod{11}$, $2^1 \equiv 2 \pmod{11}$, $2^3 \equiv 8 \pmod{11}$, $2^4 \equiv 16 \equiv 5 \pmod{11}$
$2^5 \equiv 10 \pmod{11}$, $2^6 \equiv 20 \equiv 9 \pmod{11}$, $2^7 \equiv 18 \equiv 7 \pmod{11}$
$2^8 \equiv 14 \equiv 3 \pmod{11}$, $2^9 \equiv 6 \pmod{11}$, $2^{10} \equiv 12 \equiv 1 \pmod{11}$

Le cycle est donc de 10. On divise alors n par 10 : $n = 10k + r$ avec $0 \leqslant r < 10$. On a alors par puissance et produit :

$$2^n \equiv \left(2^{10}\right)^k \times 2^r \equiv 1^k \times 2^r \equiv 2^r \pmod{11}$$

On obtient alors la table des congruence modulo 11 suivante :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2^n \equiv$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6

Partie B

1) a) On obtient la grille de codage suivante :

Lettre	B	A	D	G	E
n	2	1	4	7	5
$f(n)$	3	5	9	3	1
Lettre	C	E	I	C	A

b) On ne peut décoder le message sans ambiguité car les lettres B et G par exemple sont codées par la même lettre C (f n'est pas une bijection)

2) Dans cette question , g est la fonction définie sur Ω par « g(n) est le reste de la division par 11 de 2^n ».

a) Compléter la grille de codage suivante après l'avoir recopier :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(n)$	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
Lettre	B	D	H	E	J	I	G	C	F	A

b) Cette grille permet de décoder tout message sans ambiguité car chaque lettre est codée par une lettre différente des autres. (g est alors une bijection)

Le mot « EJIF » est le code du mot « DEFI » !