

Contrôle de mathématiques

Mardi 04 novembre 2014

EXERCICE 1

Multiples

(4 points)

- 1) Déterminer les 18 diviseurs positifs de 700. On les classera par ordre croissant.
- 2) d et n sont des entiers naturels, $d \neq 0$.
 - a) Démontrer que si d divise $9n + 2$ et $7n - 3$, alors d divise 41. On citera le théorème utilisé.
 - b) Quelles sont les valeurs possibles pour d .
- 3) Déterminer les entiers naturels n tel que $n + 4$ divise $3n + 22$

EXERCICE 2

Division euclidienne

(2 points)

On divise un entier naturel n par 152, puis par 147. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 13 et 98.
 Quel est cet entier naturel n ?

EXERCICE 3

Congruence

(2 points)

- 1) Donner suivant les valeurs de l'entier naturel n , les restes de la division euclidienne de 2^n par 5. (On pourra éventuellement donner le résultat par un tableau).
- 2) En déduire alors le reste de la division euclidienne par 5 de 2012^{2015} .

EXERCICE 4

ROC

(4 points)

- 1) Citer le théorème de la compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et la puissance.
- 2) **Pré-requis :** $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a - b \equiv 0 \pmod{n}$
 Soit a, b, c et d quatre relatifs tels que : $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$.
 Montrer que : $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
- 3) **Application :**
 Montrer que $4^4 \equiv 3 \pmod{11}$ puis en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4^{4n+2} - 3^{n+3} \text{ est divisible par } 11$$

EXERCICE 5

Date d'anniversaire

(5 points)

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance j le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance m , le rang du mois dans l'année.

Par exemple, pour une personne née le 14 mai, alors $j = 14$ et $m = 5$.

Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :

« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1^{er} août ! ».

- 1) Vérifier que pour une personne née le 1^{er} août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.
- 2) a) Pour un spectateur donné, on note z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).
Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que $z \equiv m \pmod{12}$.
- b) Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 455 en appliquant le programme de calcul (A).

Partie B

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m , le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.

On considère l'algorithme ci-contre :

```

Variables :  $j, m$  entiers
Traitement
  | pour  $m$  de 1 à ... faire
  | | pour  $j$  de 1 à ... faire
  | | |  $12j + 31m \rightarrow z$ 
  | | | si ... alors
  | | | | Afficher  $j, m$ 
  | | | fin
  | | fin
  | fin
  
```

- 1) Compléter cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que :
$$12j + 31m = 503$$
- 2) Quel est alors la date d'anniversaire correspondante ?

EXERCICE 6

Pièces d'un puzzle

(3 points)

En rangeant les n pièces de son puzzle, Raja constate que :

- si elle les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces ;
- si elle les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces ;
- si elle les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièces ;
- et si elle les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièce.

Sa mère affirme qu'alors $2n - 11$ est divisible par 5, 7, 9 et 11.

- 1) A-t-elle raison ?
- 2) Combien ce puzzle contient de pièces sachant que ce nombre est inférieur à 2000 ?