Contrôle de mathématiques

Jeudi 19 mai 2016

EXERCICE 1

Produit de matrices **(2 points)**

On donne les matrices suivantes : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 45 & 50 \\ 60 & 50 \end{pmatrix}$

Calculer, en détaillant les calculs, le produit **AB**.

EXERCICE 2

Système **(3 points)**

On donne le système suivant : (S) : $\begin{cases} 6x + 3y = 1 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$

1) Quelle est la matrice **M** associée à ce système.
2) Pourquoi cette matrice **M** est-elle inversible ?
3) Déterminer l'inverse de la matrice **M** puis résoudre le système (S).

EXERCICE 3

Matrice idempotente **(4 points)**

Une matrice carrée **A** est dite idempotente si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

1) Soit une matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Traduire par un système que **A** est idempotente.
2) Résoudre le système dans les cas suivants :
   a) $b = 0$ (4 matrices possibles) b) $b = 1$ (On exprimera **A** en fonction de a)

EXERCICE 4

Marche aléatoire **(11 points)**

Sur les sommet d'un triangle ABC, un pion initialement en A suit une marche aléatoire. À chaque étape, on tire au hasard un jeton dans une boîte de 25 jetons (3 rouges, 4 verts et 18 blancs) puis on le remet.

- Lorsqu'on est en A :
  Si le jeton tiré est rouge, le pion va en B. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en A.
- Lorsqu'on est en B :
  Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en B.
- Lorsqu'on est en C :
  Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en B. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en C.

1) Faire un graphe probabiliste illustrant cette marche aléatoire.
2) Pour tout entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape n.
   Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

3) On considère les matrices :

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$$

a) Donner la matrice $\mathbf{X}_0$ et montrer que $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n\mathbf{T}$.

b) En déduire que $\mathbf{X}_n = \mathbf{X}_0\mathbf{T}^n$.

4) On admet que $\mathbf{T} = \mathbf{PDP}^{-1}$ avec :

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{10} & \dfrac{37}{110} & \dfrac{4}{11} \\ \dfrac{1}{10} & -\dfrac{1}{10} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{11} & -\dfrac{1}{11} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$$

a) À l'aide de la calculatrice, donner les coefficients de la matrice $\mathbf{P}$. On pourra remarquer que l'on peut écrire $\mathbf{P} = (\mathbf{P}^{-1})^{-1}$ et que ces coefficients sont entiers.

b) Montrer que $\mathbf{T}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$ pour tout n non nul.

c) Donner sans justification les coefficients de la matrice $\mathbf{D}^n$.

5) On note $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ les coefficients de la première ligne de la matrice $\mathbf{T}^n$ ainsi : $T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

On admet que : $\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10} \times 0,6^n \\ \beta_n = \dfrac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110} \end{cases}$

On ne cherchera pas à calculer les coefficients de la deuxième ligne ni ceux de la troisième ligne.

a) Exprimer a_n et b_n, puis c_n en fonction de α_n et β_n.

b) Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

c) Sur quel sommet a-t-on le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'étapes de cette marche aléatoire ?