BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (5 points)

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1) On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a) Déterminer la forme exponentielle de a.
   b) Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.
2) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.
3) Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   a) Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel.
   b) Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.
4) Soit un point M d'affixe z.
   a) Montrer que $f(z)$ est réel si, et seulement si $(z - \overline{z})(|z|^2 - 1) = 0$
   b) Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1) Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3) En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2) a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}$.
   En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées puis étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - \ln x}{x}$.

   Que peut-on dire de la courbe $\mathscr{C}'$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}$?

Exercice 3 **(5 points)**

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $v_1(t) = 5 \times \dfrac{e^{0,3t} - 1}{e^{0,3t} + 1}$.

1) Déterminer le sens de variation de la fonction v_1.
2) On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement. On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en m.s^{-1}) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.

   On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s^{-1}.

   Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.
On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en m.s^{-1}), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$v_2(t) = 32,7\left(1 - e^{-0,3t}\right).$$

1) Quelle est la vitesse, exprimée en m.s^{-1}, atteinte par le colis au bout de 10 secondes ? Arrondir à 0,1 m.s^{-1}.
2) Résoudre l'équation $v_2(t) = 30$ m.s^{-1}. Donner une interprétation concrète de la solution de cette équation dans le cadre de cet exercice.
3) On sait que la chute du colis dure 20 secondes.

   On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$d(T) = \int_0^T v_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

   a) Montrer que, pour tout réel T de l'intervalle $[0\,;\,20]$, $d(T) = 109\left(\mathrm{e}^{-0,3T} + 0,3T - 1\right)$.
   b) Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol.

4) Déterminer un encadrement d'amplitude 0,1 s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.

   On pourra étudier les variations de la fonction $T \mapsto d(T) - 700$ dans l'intervalle $[0\,;\,30]$

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.
Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\dots1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre } 1}} = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k.$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.
L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1) Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.
2) Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
   a) Prouver que, pour tout entier naturel j, $10^j \equiv 1 \mod 3$.
   b) En déduire que $N_p \equiv p \mod 3$.
   c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.
3) Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.
   a) Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ tel que $10^m \equiv a \mod 7$.
   (*On ne demande pas de justification.*)

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

   b) Soit p un entier naturel non nul.
   Montrer que $10^p \equiv 1 \mod 7$ si et seulement si p est un multiple de 6.
   (*On pourra utiliser la division euclidienne de p par* 6.)
   c) Justifier que, pour tout entier nature p non nul, $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.
   d) Démontrer que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9N_p$ ».
   e) En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \mod 10$.
   a) Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \dots\ [10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \dots\ [10]$										

   b) En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que : $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.
   c) Conclure que $n^2 \equiv 1 \mod 20$.
2) Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?
3) En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.