Contrôle de mathématiques

Jeudi 8 novembre 2018

EXERCICE 1

Multiples **(3 points)**

1) Trouver tous les diviseurs positifs de 700. Combien y en a-t-il ?
2) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour quelles valeurs de n le nombre $\dfrac{6n+9}{2n+1}$ est-il un entier relatif ?

EXERCICE 2

Diviseur commun **(2 points)**

On pose : $a = 3k + 2$ et $b = 5k - 7$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

1) Montrer que si d divise a et b alors d divise 31. On citera le théorème utilisé.
2) Quels sont les diviseurs communs positifs possibles à a et b ?

EXERCICE 3

Divisibilité par 8 **(2 points)**

Soient k un entier relatif et $A = (2k+1)^2 - 1$.

1) Factoriser A.
2) Montrer que A est divisible par 8 pour tout entier relatif k.

EXERCICE 4

ROC et congruence **(4 points)**

1) Soient $n \geqslant 2$ et les entiers relatifs a, b, c, d tels que : $a \equiv b \ (n)$ et $c \equiv d \ (n)$.
   Montrer que : $a + c \equiv b + d \ (n)$
2) a) Montrer que : $3^3 \equiv -1 \ (7)$.
   b) En déduire que $1515^{2004} - 1$ est divisible par 7 et que le reste de 3^{2018} par 7 est 2.

EXERCICE 5

Résolution d'équation **(3 points)**

Soit l'équation (E) : $x^2 - x + 4 \equiv 0 \ (6)$

1) Recopier puis remplir le tableau de congruence suivant :

$x \equiv \ (6)$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv \ (6)$						
$-x + 4 \equiv \ (6)$						
$x^2 - x + 4 \equiv \ (6)$						

2) Résoudre alors l'équation (E).

EXERCICE 6

Critère de divisibilité par 7 **(6 points)**

Cet exercice a pour but d'utiliser et de démontrer un critère de divisibilité par 7.

1) Donner tous les nombres entiers naturels à un et deux chiffres divisibles par 7.
2) Voici deux exemples mettant un œuvre une même procédure permettant de déterminer si un nombre entier naturel est divisible par 7 ou non.

574 est-il divisible par 7 ?

$$\begin{array}{r|l} 57 & 4 \\ -8 & 4\times 2 \\ 49 & \end{array}$$

49 est divisible par 7
donc 574 aussi

827 est-il divisible par 7 ?

$$\begin{array}{r|l} 82 & 7 \\ -\ \ 14 & 7\times 2 \\ 68 & \end{array}$$

68 n'est pas divisible par 7
donc 827 non plus.

À l'aide de cette procédure, dire si les nombres 406, 895 et 5607 sont divisibles par 7.

3) Énoncer un critère simple de divisibilité par 7 lié à cette procédure.
4) Démonstration. Soit n un entier naturel tel que : $n = 10a + b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$.
   Montrer l'équivalence : $n \equiv 0 \ (7) \quad \Leftrightarrow \quad a - 2b \equiv 0 \ (7)$.

   On procédera par double implication et on rappelle que $-6 \equiv 1 \ (7)$.