Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 8 novembre 2018

EXERCICE 1

Multiples **(3 points)**

1) On peut présenter les diviseurs sous forme d'un tableau :

1	700
2	350
4	175
5	140
7	100
10	70
14	50
20	35
25	28

$D_{700} = \{1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 25, 28, 35, 50, 70, 100, 140, 175, 350, 700\}$

Il y a 18 diviseurs.

2) Si $\dfrac{6n+9}{2n+1}$ entier relatif alors $(2n+1)$ divise $(6n+9)$.

$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad 6n+9 = k(2n+1) \quad \Leftrightarrow \quad 3(2n+1)+6 = k(2n+1) \quad \Leftrightarrow \quad (2n+1)(k-3) = 6$

$(2n+1)$ divise alors 6 et $D_6 = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$

Comme $(2n+1)$ est impair, on ne retient que les diviseurs impairs :

$2n+1$	-3	-1	1	3
n	-2	-1	0	1

EXERCICE 2

Diviseur commun **(2 points)**

1) d divise a et b donc d divise toute combinaison linéaire de a et de b, donc d divise :

$$5a - 3b = 5(3k+2) - 3(5k-7) = 15k + 10 - 15k + 21 = 31$$

2) Comme 31 est premier, les diviseurs communs positifs possibles de a et b sont 1 et 31.

EXERCICE 3

Divisibilité par 8 **(2 points)**

1) $A = (2k+1-1)(2k+1+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1)$.

2) Comme k et $(k+1)$ sont deux entiers consécutifs l'un des deux est pair donc le produit $k(k+1)$ est divisible par 2 et par suite $A = 4k(k+1)$ est divisible par 8.

EXERCICE 4

ROC et congruence **(4 points)**

1) Voir cours.

2) a) $3^3 + 1 = 28 = 7 \times 4 \quad \Rightarrow \quad 3^3 + 1 \equiv 0 \ (7) \quad \Rightarrow \quad 3^3 \equiv -1 \ (7)$.

b) $1515 = 7 \times 216 + 3$ donc $1515 \equiv 3 \ (7)$ de plus $2004 = 3 \times 668$

$$1515 \equiv 3 \ (7) \overset{\uparrow 3}{\Rightarrow} 1515^3 \equiv 3^3 \equiv -1 \ (7) \overset{\uparrow 668}{\Rightarrow} (1515^3)^{668} \equiv (-1)^{668} \Rightarrow 1515^{2004} \equiv 1 \ (7)$$

$$\Rightarrow 1515^{2004} - 1 \equiv 0 \ (7). \quad 1515^{2004} - 1 \text{ divisible par } 7$$

La division euclidienne de 2018 par 3 : $2018 = 3 \times 672 + 2$ on a alors :

$3^3 \equiv -1 \ (7) \overset{\uparrow 672}{\Rightarrow} (3^3)^{672} \equiv (-1)^{672} \equiv 1 \ (7) \overset{\times 3^2}{\Rightarrow} 3^2 \times (3^3)^{672} \equiv 3^2 \equiv 2 \ (7) \Rightarrow$
$3^{2018} \equiv 2 \ (7)$

Le reste de la division de 3^{2018} par 7 est 2.

EXERCICE 5

Résolution d'équation **(3 points)**

1) On obtient le tableau de congruence suivant :

$x \equiv \ (6)$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv \ (6)$	0	1	4	3	4	1
$-x + 4 \equiv \ (6)$	4	3	2	1	0	5
$x^2 - x + 4 \equiv \ (6)$	4	4	0	4	4	0

2) L'équation (E) admet deux séries de solutions : $x \equiv 2 \ (6)$ ou $x \equiv 5 \ (6)$.

EXERCICE 6

Critère de divisibilité par 7 **(6 points)**

1) Les multiple de 7 inférieurs à 100 sont : 0,7,14,21,28,35,42,49,56,63,70,77,84,91,98.

2) 406 est divisible par 7.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 6 \\ -12 & 6 \times 2 \\ 28 & \end{array}$$

28 divisible par 7

895 n'est pas divisible par 7 ?

$$\begin{array}{r|l} 89 & 5 \\ -10 & 5 \times 2 \\ 79 & \end{array}$$

79 n'est pas divisible par 7.

Pour montrer que 5607 est divisible par 7, on effectue deux fois la procédure.

$$\begin{array}{r|l} 560 & 7 \\ -14 & 7 \times 2 \\ 546 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 6 \\ -12 & 6 \times 2 \\ 42 & \end{array}$$

42 n'est pas divisible par 7.

3) "*Un nombre est divisible par 7 si le nombre de ses dizaines diminué du double du chiffre de ses unités est divisible par 7*". On peut réitérer le processus si nécessaire.

4) Dans le sens direct :

$n \equiv 0 \ (7) \quad \Rightarrow \quad 10a + b \equiv 0 \ (7) \quad \overset{10\equiv 3\ (7)}{\Rightarrow} \quad 3a + b \equiv 0 \ (7) \quad \overset{\times(-2)}{\Rightarrow} \quad -6a - 2b \equiv 0 \ (7)$
$\overset{-6\equiv 1\ (7)}{\Rightarrow} \quad a - 2b \equiv 0 \ (7)$

Réciproquement :

$a - 2b \equiv 0 \ (7) \quad \overset{\times 10}{\Rightarrow} \quad 10a - 20b \equiv 0 \ (7) \quad \overset{-20\equiv 1\ (7)}{\Rightarrow} \quad 10a + b \equiv 0 \ (7) \quad \Rightarrow \quad n \equiv 0 \ (7)$