Devoir à rendre pour le 10 janvier 2019

Exercice 1

Résolution d'équations diophantienne **(5 points)**

1) Soit p un entier relatif donné.
On s'intéresse dans cette question à l'équation (E_p) : $3x + 4y = p$.
où $(x\ ;\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.

   a) Vérifier que le couple $(-p\ ;\ p)$ est une solution particulière de l'équation.
   b) Donner l'ensemble des solutions $(x\ ;\ y)$ de l'équation (E_p) en fonction de p.

2) On considère maintenant l'équation (E) : $6x + 8y - z = 0$.
Soit $(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$ une solution de (E).

   a) Démontrer que z_0 est pair.
   b) On pose $z_0 = 2p$ où p est un entier relatif.
   Prouver que le couple $(x_0\ ;\ y_0)$ est solution de l'équation (E_p).
   c) En utilisant la question 1), déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 2

Suite de Fibonacci **(5 points)**

On appelle suite de Fibonacci la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

1) a) Calculer les termes de la suite de Fibonacci jusqu'à u_{10}.
   b) Que peut-on conjecturer sur $\text{pgcd}(u_n\ ,\ u_{n+1})$ pour tout entier naturel n non nul ?

2) On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n^2 - u_{n+1} \times u_{n-1}$ pour tout entier naturel n non nul.
   a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = -v_n$.
   Aide : on pourra considérer la relation de récurrence à l'ordre $(n + 1)$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n^2 - u_{n+1} \times u_{n-1} = (-1)^{n-1}$.
   c) Démontrer alors la conjecture émise à la question 1 b)