Correction du devoir du 10 janvier 2019

Exercice 1

Résolution d'équations diophantienne **(5 points)**

1) Soit p un entier relatif donné.

a) On vérifie que $(-p\,;\ p)$ est une solution de (E_p) : $3(-p)+4p=-3p+4p=p$

b) Soit $(x\,;\ y)$ une solution de l'équation (E_p), on a alors : $\begin{cases} 3x+4y=p \\ 3(-p)+4p=p \end{cases}$

En soustrayant termes à termes, on obtient :
$3(x+p)+4(y-p)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3(x+p)=4(-y+p) \quad (E'_p)$

4 divise $3(x+p)$, or $\text{pgcd}(4,3)=1$, d'après le théorème de Gauss, 4 divise $(x+p)$.
Il existe un entier relatif k tel que : $x+p=4k$.
En remplaçant dans (E'_p), on obtient : $-y+p=3k$.

L'ensemble des couples solutions de (E_p) sont de la forme : $\begin{cases} x=-p+4k \\ y=p-3k \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$.

2) a) On a : $6x_0+8y_0+z_0=0 \quad\Leftrightarrow\quad z_0=2(3x_0+4y_0)$.

Comme x_0 et y_0 sont des entiers relatifs, z_0 est bien pair.

b) En remplaçant $z_0=2p$, on obtient : $2p=2(3x_0+4y_0) \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} 3x_0+4y_0=p$.

(x_0,y_0) sont donc solution de (E_p).

c) L'ensemble des triplets solutions de (E) sont de la forme : $\begin{cases} x=-p+4k \\ y=p-3k \\ z=2p \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$.

L'ensemble solution est donc l'ensemble des points de coordonnées entières de la droite passant par $\text{A}(-p\,;\ p\,;\ 2p)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(4\,;\ -3\,;\ 0)$.

Exercice 2

Suite de Fibonacci **(5 points)**

1) a) On obtient les termes suivants :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

b) On calcule $\text{pgcd}(u_n\,,\ u_{n+1})$ pour les premiers termes n non nul :

$\text{pgcd}(1,1)=1$	$\text{pgcd}(1,2)=1$	$\text{pgcd}(2,3)=1$
$\text{pgcd}(3,5)=1$	$\text{pgcd}(5,8)=1$	$\text{pgcd}(8,13)=1$
$\text{pgcd}(13,21)=1$	$\text{pgcd}(21,34)=1$	$\text{pgcd}(34,55)=1$

Conjecture : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \text{pgcd}(u_n\,,\ u_{n+1})=1$.

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n \overset{u_{n+2}=u_{n+1}+u_n}{=} u_{n+1}^2 - (u_{n+1}+u_n)u_n = u_{n+1}^2 - u_{n+1}u_n - u_n^2$

$$= u_{n+1}(u_{n+1}-u_n) - u_n^2 \overset{u_{n+1}-u_n=u_{n-1}}{=} u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = -(u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}) = -v_n$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = -1$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -1$ et de premier terme $v_1 = u_1^2 - u_2u_0 = 1$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = v_1q^{n-1} = (-1)^{n-1} \Leftrightarrow u_n^2 - u_{n+1}\times u_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

c) On sépare les cas suivant la parité de n :

- n pair donc $n-1$ impair : $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = -1 \Leftrightarrow (-u_n)u_n + (u_{n-1})u_{n+1} = 1$.

  Il existe donc une combinaison linéaire de u_n et u_{n+1} tel que $\alpha u_n + \beta u_{n+1} = 1$. D'après le théorème de Bézout, $\text{pgcd}(u_n\ ,\ u_{n+1}) = 1$.

- n impair donc $n-1$ pair : $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = 1 \Leftrightarrow (u_n)u_n + (-u_{n-1})u_{n+1} = 1$.

  Il existe donc une combinaison linéaire de u_n et u_{n+1} tel que $\alpha u_n + \beta u_{n+1} = 1$. D'après le théorème de Bézout, $\text{pgcd}(u_n\ ,\ u_{n+1}) = 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \text{pgcd}(u_n\ ,\ u_{n+1}) = 1$.