Correction du devoir du 13 mai 2020

Exercice 1

Opérations sur les matrices **(5 points)**

1) Soit la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de dimension 2×4 telle que $a_{ij} = 2ij$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \\ 6 & 12 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

2) $\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25-10 & -5+2 \\ 50-20 & -10+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = 3\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}^3 = \mathbf{M}^2\mathbf{M} \overset{\mathbf{M}^2=3\mathbf{M}}{=} 3\mathbf{M}^2 \overset{\mathbf{M}^2=3\mathbf{M}}{=} 9\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 45 & -9 \\ 90 & 18 \end{pmatrix}$$

3) a) $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25+8-32 & -10-6+16 & -40-16+56 \\ -20-12+32 & 8+9-16 & 32+24-56 \\ 20+8-28 & -8-6+14 & -32-16+49 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3$. La matrice **A** est sa propre inverse.

Remarque : Si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$ alors **A** est la matrice d'une symétrie.

b) $\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \overset{\times A \text{ à gauche}}{\Rightarrow} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+6+32 & -5+4+40 \\ 4-9-32 & 4-6-40 \\ -4+6+28 & -4+4+35 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 33 & 39 \\ -37 & -42 \\ 30 & 35 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Systèmes **(4 points)**

1) a) On pose : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 44 \end{pmatrix}$ on a alors $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

b) $\det(\mathbf{A}) = 26 - 21 = 5$ donc **A** est inversible et $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$.

On a alors : $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 44 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -15 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

La solution du système est le couple $(-3\,;\ 5)$

2) a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) On pose $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Le système s'écrit alors $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$ La solution est donc $(1\,;\,2\,;\,4)$

Exercice 3

Matrice et arithmétique **(5 points)**

Partie A

1)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	0	1	3	11	39	139	495	1 763	6 279

$u_6 = 495 = 3^2 \times 5 \times 11$ et $u_8 = 6\,279 = 3 \times 7 \times 13 \times 23$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{A}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_{n+1} + 2a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \overset{\text{Rel.}}{=} \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$.

3) **Initialisation :** $n = 1$, $\begin{pmatrix} a_2 & 2a_1 \\ a_1 & 2a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^1$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 2a_n \\ a_n & 2a_{n-1} \end{pmatrix}$,

montrons que $\mathbf{A}^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} & 2a_{n+1} \\ a_{n+1} & 2a_n \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^n \overset{\text{HR}}{=} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} & 2a_n \\ a_n & 2a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{3a_{n+1} + 2a_n}^{a_{n+2}} & 2(\overbrace{3a_n + 2a_{n-1}}^{a_{n+1}}) \\ a_{n+1} & 2a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} & 2a_{n+1} \\ a_{n+1} & 2a_n \end{pmatrix}$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 2a_n \\ a_n & 2a_{n-1} \end{pmatrix}$

Partie B

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \det(\mathbf{A}^n) = (\det \mathbf{A})^n \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{n+1} & 2a_n \\ a_n & 2a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n \Leftrightarrow$

$2a_{n+1}a_{n-1} - 2a_n^2 = (0-2)^n \Leftrightarrow 2(a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2) = (-2)^n \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-2)^{n-1}$

2) Si d divise a_n et a_{n+1} alors d divise tout combinaison linéaire de a_n et a_{n+1} donc divise $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-2)^{n-1}$. Donc d est un puissance de 2.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1}$ est impair.
Initialisation : Pour $n = 0$, $a_{0+1} = a_1 = 1$ impair. La relation est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons que a_{n+1} est impair, montrons que a_{n+1} est impair. $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$, d'après HR, $3a_{n+1}$ est impair et comme $2a_n$ est pair par somme de parités différentes a_{n+1} est impair. La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1}$ est impair.

On en déduit alors que d est impair et d est une puissance de 2, donc $d = 2^0 = 1$. Les termes a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Partie C

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A}^{n+k} = \mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+k+1} & 2a_{n+k} \\ a_{n+k} & 2a_{n+k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 2a_n \\ a_n & 2a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k+1} & 2a_k \\ a_k & 2a_{k-1} \end{pmatrix}$.

En égalisant les coefficients de la 2e ligne et de la 1re colonne, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{N},\quad a_{n+k} = a_n a_{k+1} + 2a_{n-1}a_k$$

2) En prenant $k = n$ dans la relation : $a_{2n} = a_n a_{n+1} + 2a_n a_{n-1} = a_n(a_{n+1} + 2a_{n-1}) = ka_n$
En prenant $k = 2n$ dans la relation : $a_{3n} = a_n a_{2n+1} + 2a_{2n}a_{n-1} = a_n(a_{n+1} + 2ka_{n-1})$.

Donc a_n divise a_{2n} et a_{3n}.

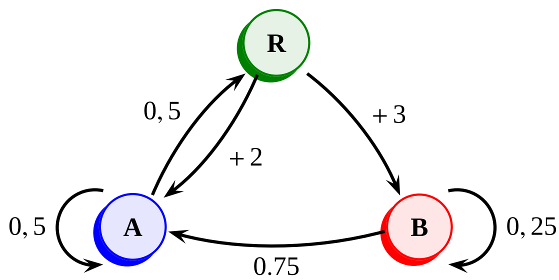
3) Comme $24 = 6 \times 4 = 8 \times 3$, d'après 2), a_6 divise a_{12} donc divise a_{24} et a_8 divise a_{24}.

Or $u_6 = 495 = 3^2 \times 5 \times 11$ et $u_8 = 6\,279 = 3 \times 7 \times 13 \times 23$.
Les nombres premiers 3, 5, 7,11, 13 divisent a_{24}, d'après le corollaire du théorème de Gauss, leur produit $15\,015 = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 15\,015$ divise a_{24}.

Exercice 4

Œuvre aquatique **(6 points)**

1) On peut éventuellement faire le graphe probabiliste suivant :
Le système permettant de passer pour A et B de l'état n à l'état $n+1$, vérifie :



$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,5a_n + 0,75b_n + 2 \\ b_{n+1} = 0,25b_n + 3 \end{cases}$$

or $\mathbf{MU}_n + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0,5a_n + 0,75b_n + 2 \\ 0 + 0,25b_n + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$

2) a) $\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3-3 \\ 0-0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2$. Donc $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}$.

b) $\mathbf{PMP} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1,5 \\ 0 & -0,25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} = \mathbf{D}$

c) **Initialisation :** $n = 0$, $\mathbf{PD}^0\mathbf{P} = \mathbf{PI}_2\mathbf{P} = \mathbf{P}^2 = \mathbf{I}_2 = \mathbf{A}^0$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathbf{M}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}$, montrons $\mathbf{M}^{n+1} = \mathbf{PD}^{n+1}\mathbf{P}$.

$\mathbf{D} = \mathbf{PMP}$, en multipliant à gauche et à droite par $\mathbf{P}$
$$\mathbf{PDP} = \mathbf{P}^2\mathbf{DP}^2 = \mathbf{I}_2\mathbf{MI}_2 = \mathbf{M}\ \ (1)$$

$\mathbf{M}^{n+1} = \mathbf{MM}^n \overset{\text{HR et (1)}}{=} \mathbf{PDP} \times \mathbf{PD}^n\mathbf{P} = \mathbf{PDI}_2\mathbf{D}^n\mathbf{P} = \mathbf{PD}^{n+1}\mathbf{P}$.

La proposition est héréditaire.
Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}$

d) $\mathbf{M}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,25^n \\ 0 & -0,25^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$

3) On pose $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc $\mathbf{X} = \mathbf{MX} + \mathbf{C} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 0,5x + 0,75y + 2 \\ y = 0,25y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{0,75} = 4 \\ 0,5x = 5 \Leftrightarrow x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

4) a) $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{X} \overset{\mathbf{X}=\mathbf{MX}+\mathbf{C}}{=} \mathbf{MU}_n + \mathbf{C} - \mathbf{MX} - \mathbf{C} = \mathbf{M}(\mathbf{U}_n - \mathbf{X}) = \mathbf{MV}_n$.

On a alors de proche en proche : $\mathbf{V}_n = \mathbf{M}^n\mathbf{V}_0$ avec $\mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{U}_n = \mathbf{V}_n + \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3\times 0,5^n - 3\times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$

5) a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,25^n = 0$ car $-1 < 0,25 < 0,5 < 1$

donc par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 10$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 4$.

b) La suite $(0,25^n)$ étant décroissante alors $(-3 \times 0,25^n)$ est croissante donc la suite (b_n) est croissante et convergente vers 4 donc (b_n) est majorée par 4.

La suite (a_n) est croissante et convergente vers 10 donc (a_n) est majorée par 10.

Le bassin A devra être d'au moins 1000 ℓ et le bassin B d'au moins 400 ℓ.