Correction contrôle de mathématiques
Du mercredi 27 novembre 2019

EXERCICE 1

Diviseurs **(2,5 points)**

1) Les diviseurs positifs de 28 sont : 1, 2, 4, 7, 14, 28

2) a) $x^2 - 4y^2 = 28 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2y)(x+2y) = 28.$

   $(x-2y)$ et $(x+2y)$ sont des diviseurs de 28, comme $x, y \in \mathbb{N}$, $x - 2y < x + 2y$, d'après les diviseurs de 28, on a les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 2y = 28 \end{cases} , \quad \begin{cases} x - 2y = 2 \\ x + 2y = 14 \end{cases} , \quad \begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

   b) En additionnant les deux lignes des systèmes on obtient respectivement :

$$2x = 29 \quad , \quad 2x = 16 \quad , \quad 2x = 11$$

   Seul le deuxième système admet des solutions : $x = 8$ et $y = \dfrac{x-2}{2} = 3$.

   Conclusion l'équation (E) admet qu'une solution dans $\mathbb{N}^2$: (8,3).

EXERCICE 2

Division euclidienne **(2 points)**

On transforme l'égalité pour obtenir un reste compris entre 0 et le diviseur.

1) $842\,295 = 3251 \times 259 + 286 = 3251 \times 259 + 259 + 27 = 3252 \times 259 + 27.$
   Le quotient et le reste de 842 295 dans la division par 259 sont : $q = 3252$ et $r = 27$.

2) $-842\,295 = 3251 \times (-259) - 286 = 3251 \times (-259) - 3251 + 2965 = 3251 \times (-260) + 2965$
   Le quotient et le reste de $-842\,295$ dans la division par 3251 sont : $q = -260$ et $r = 2965$.

EXERCICE 3

Congruence **(3 points)**

1) On établit le cycle des restes de 6^n dans la division par 7 :

$$6^0 \equiv 1 \ (7), \quad 6^1 \equiv 6 \ (7), \quad 6^2 \equiv 36 \equiv 1 \ (7)$$

   Le cycle est de 2 : si n est pair $6^n \equiv 1 \ (7)$ et si n est impair $6^n \equiv 6 \ (7)$.

2) En utilisant la compatibilité de la congruence avec l'addition et la multiplication, on obtient :

   $451 = 7 \times 64 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 451 \equiv 3 \ (7)$ et $912 = 7 \times 130 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 912 \equiv 2 \ (7)$, on obtient :

   $451 \times 6^{43} - 912 \equiv 3 \times 6 - 2 \equiv 16 \equiv 2 \ (7).$
   Le reste dans la division par 7 de $451 \times 6^{43} - 912$ est égal à 2.

EXERCICE 4

PGCD **(4 points)**

1) a) On a les équivalences suivantes en remarquant que n doit être un multiple de 6 :

$$\text{pgcd}(n, 150) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \text{pgcd}(6k\,,\ 6 \times 25) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 6\,\text{pgcd}(k, 25) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \text{pgcd}(k, 25) = 1$$

k et $25 = 5^2$ sont premiers entre eux, donc k n'est pas un multiple de 5.

Conclusion : $\text{pgcd}(n, 150) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad n$ multiple de 6, mais pas multiple de 5

b) $6k < 50 \quad \Leftrightarrow \quad k \leqslant 8$. Les valeurs possibles pour k sont donc : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8.

Les valeurs de n correspondantes sont alors : $n \in \{6, 12, 18, 24, 36, 42, 48\}$

2) a) On a les divisions suivantes :

$$\begin{aligned} 713 &= 527 \times 1 + 186 \\ 527 &= 186 \times 2 + 155 \\ 186 &= 155 \times 1 + 31 \\ 155 &= 31 \times 5 \end{aligned} \qquad \text{pgcd}(527, 713) = 31$$

b) Corollaire du théorème de Bézout : « L'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières si, et seulement si, c est un multiple du $\text{pgcd}(a, b)$ ».

93 est un multiple de $31 = \text{pgcd}(713, 527)$, l'équation $713x - 527y = 93$ admet donc des solutions entières.

Exercice 5

PGCD bis **(3 points)**

1) On pose $D = \text{pgcd}(a, b)$.
D divise a et b donc D divise toute combinaison linéaire de a et de b donc D divise :

$$5a - 3b = 5(3n + 1) - 3(5n - 1) = 15n + 5 - 15n + 3 = 8$$

D est donc un diviseur de 8.

2) $\text{pgcd}(a, b) = 8$ si a et b sont des multiples de 8 :

$$\begin{array}{rrl} & a &\equiv 0 \pmod 8 \\ & 3n + 1 &\equiv 0 \pmod 8 \\ & 3n &\equiv -1 \pmod 8 \\ (\times 3) & 9n &\equiv -3 \pmod 8 \quad \text{or } 9 \equiv 1 \pmod 8 \\ & n &\equiv -3 \equiv 5 \pmod 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} & b &\equiv 0 \pmod 8 \\ & 5n - 1 &\equiv 0 \pmod 8 \\ & 5n &\equiv 1 \pmod 8 \\ (\times 5) & 25n &\equiv 5 \pmod 8 \quad \text{or } 25 \equiv 1 \pmod 8 \\ & n &\equiv 5 \pmod 8 \end{array}$$

$\text{pgcd}(a, b) = 8$ si $n \equiv 5 \pmod 8$.

Exercice 6

Théorème de Bézout **(4 points)**

1) a) Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
« a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que : $au + bv = 1$ »

b) Par double implication.
a et b sont premiers entre eux donc $D = 1$ et donc d'après l'identité de Bézout, il existe un couple d'entiers relatif (u, v) tel que : $au + bv = 1$.

Réciproquement : Il existe un couple d'entier relatif (u, v) tel que $au + bv = 1$.
D divise a et b donc D divise toute combinaison linéaire de a et de b donc D divise $au + bv$.
D divise 1 donc $D = 1$.

2) a) $5a - 14b = 5(14n + 3) - 14(5n + 1) = 70n + 15 - 70n - 14 = 1$.

Il existe un couple d'entiers relatifs $(u, v) = (5, -14)$, tel que $au + bv = 1$, donc d'après le théorème de Bézout, a et b sont premiers entre eux.

b) On divise 87 par 14 et 31 par 5, on trouve alors : $87 = 14 \times 6 + 3$ et $31 = 5 \times 6 + 1$.
Il existe $n = 6$ tel que $87 = 14n + 3$ et $31 = 5n + 1$, d'après 2a) $\text{pgcd}(87, 31) = 1$.

Exercice 7

Entiers de Bézout **(1,5 points)**

On applique l'algorithme d'Euclide puis pour trouver une solution on remonte cet algorithme :

1) Par l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 40 &= 17 \times 2 + 6 \quad (1)\\ 17 &= 6 \times 2 + 5 \quad (2)\\ 6 &= 5 \times 1 + 1 \quad (3) \end{aligned}$$

$\text{pgcd}(40, 17) = 1$

2) On remonte l'algorithme d'Euclide

$$\begin{array}{lrl} (3) & 5 \times 1 &= 6 - 1\\ 1 \times (2) & 17 &= 6 \times 2 + 6 - 1\\ & &= 6 \times 3 - 1\\ & 6 \times 3 &= 17 + 1\\ 3 \times (1) & 40 \times 3 &= 17 \times 6 + 6 \times 3\\ & &= 17 \times 6 + 17 + 1\\ & &= 17 \times 7 + 1 \end{array}$$

$17 \times (-7) - 40 \times (-3) = 1$

Le couple $(-7, -3)$ est alors solution.